

Задание №24

Термодинамика и молекулярная физика

1. Сферическую оболочку воздушного шара делают из материала, квадратный метр которого имеет массу 2 кг. Шар наполняют гелием при атмосферном давлении 10^5 Па. Определите минимальную массу оболочки, при которой шар начнет поднимать сам себя. Температура гелия и окружающего воздуха одинакова и равна 0°C . (Площадь сферы $S = 4\pi R^2$ объём шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$)

По 2-му закону Ньютона: $F_A = m_{\text{He}}g + m_{\text{об}}g$

Сила Архимеда: $F_A = \rho_{\text{в}}gV = \rho_{\text{в}}g\frac{4}{3}\pi R^3$

Вес гелия: $m_{\text{He}}g = \rho_{\text{He}}gV = \rho_{\text{He}}g\frac{4}{3}\pi R^3$

Оболочка: $m_{\text{об}}g = bSg = bg4\pi R^2$ ($b = 2$ кг/м³ – отношение массы оболочки к ее площади)

Отсюда: $\rho_{\text{в}}g\frac{4}{3}\pi R^3 = \rho_{\text{He}}g\frac{4}{3}\pi R^3 + bg4\pi R^2$ Радиус: $R = \frac{3b}{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{He}}}$

Уравнение Клайперона-Менделеева: $pV = \frac{m}{M}RT$

Отсюда: $\rho = \frac{Mp}{RT}$ $\rho_{\text{He}} = \frac{M_{\text{He}}p}{RT}$ $\rho_{\text{в}} = \frac{M_{\text{в}}p}{RT}$

Радиус оболочки: $R = \frac{3bRt}{p(M_{\text{в}} - M_{\text{He}})} \approx 5,445$ м Масса: $m = b4\pi R^2 \approx 745$ кг

Ответ: 745 кг.

2. Воздушный шар, оболочка которого имеет массу $M = 145$ кг и объем $V = 230$ м³, наполняется горячим воздухом при нормальном атмосферном давлении и температуре окружающего воздуха $t_0 = 0$ °С. Какую минимальную температуру t должен иметь воздух внутри оболочки, чтобы шар начал подниматься? Оболочка шара нерастяжима и имеет в нижней части небольшое отверстие.

Условие подъема шара: $F_A \geq Mg + mg$

Отсюда: $\rho_0 gV \geq Mg + \rho gV$ $\rho_0 V \geq M + \rho V$

ρ_0 - плотность окружающего воздуха ρ - плотность воздуха внутри оболочки

Уравнение Клайперона-Менделеева: $pV = \frac{m}{Mr} RT$

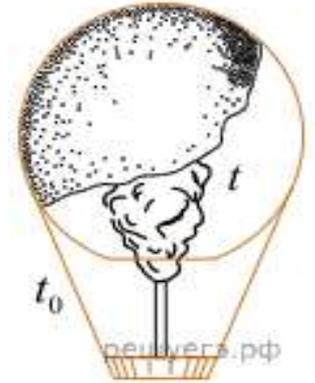
$$\rho = \frac{Mrp}{RT} \quad \rho_0 = \frac{Mrp}{RT_0}$$

Отсюда: $\frac{Mrp}{RT_0} V \geq M + \frac{Mrp}{RT} V$

$$\frac{Mrp}{RT_{\text{мин}}} V = \frac{Mrp}{RT_0} V - M$$

$$T_{\text{мин}} = T_0 \frac{MrpV}{pMrV - MRT_0} \approx 538 \text{ К} = 265 \text{ °С}$$

Ответ: 265 °С



3. В вертикальном цилиндрическом сосуде с гладкими стенками под поршнем массой $m = 10$ кг и площадью поперечного сечения $S = 50 \text{ см}^2$ находится разреженный газ (см. рис.). При движении сосуда по вертикали с ускорением, направленным вверх и равным по модулю $a = 1 \text{ м/с}^2$, высота столба газа под поршнем постоянна и на 5% меньше, чем в покоящемся сосуде. Считая температуру газа под поршнем неизменной, а наружное давление постоянным, найдите это наружное давление. Масса газа под поршнем постоянна.

В первом случае: $p_1 = p_H + p_{\text{П1}} = p_H + \frac{mg}{S}$

Во втором случае: $p_2 = p_H + p_{\text{П2}} = p_H + \frac{mg+ma}{S}$

Объемы до и после движения сосудов: $\frac{V_2}{V_1} = \frac{h_2}{h_1} = 0,95$

Уравнение Клайперона-Менделеева: $pV = \nu RT$

Отсюда: $p_1 V_1 = p_2 V_2$

$p_1 = 0,95 p_2$

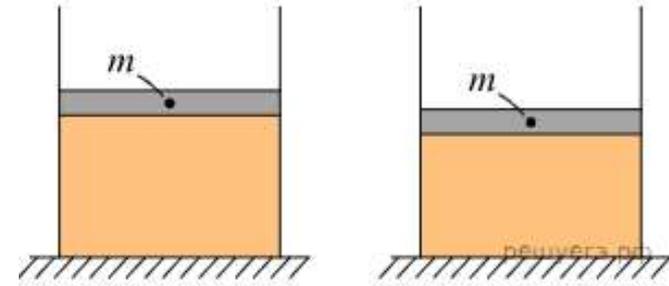
$$p_H + \frac{mg}{S} = 0,95 \left(p_H + \frac{mg + ma}{S} \right)$$

$$p_H - 0,95 p_H = \frac{(mg + ma)0,95}{S} - \frac{mg}{S}$$

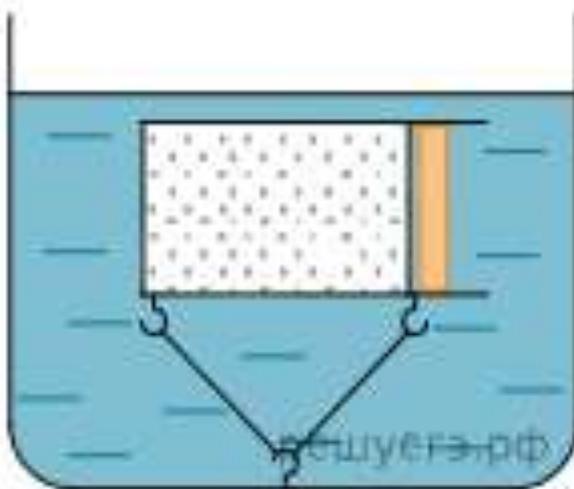
$$0,05 p_H = \frac{m}{S} (0,95a - 0,05g)$$

$$p_H = \frac{10}{0,05 \cdot 50 \cdot 10^{-3}} (0,95 \cdot 1 - 0,05 \cdot 10) = 1,8 \cdot 10^4 \text{ Па}$$

Ответ: $1,8 \cdot 10^4$ Па



4. Сосуд с воздухом, отделённым от атмосферы поршнем, поместили в сосуд с водой и прикрепили ко дну кастрюли нитью, не дающей сосуду всплыть на поверхность. Начальная температура воздуха в сосуде и воды в кастрюле $t_1 = 18^\circ\text{C}$. Кастрюлю помещают в холодильник. Ниже какой температуры t_2 должна охладиться вода, чтобы сосуд опустился на дно кастрюли? Начальный объём воздуха в сосуде $V_1 = 2\text{ дм}^3$. Масса сосуда с поршнем $m = 2,2\text{ кг}$. Сосуд и поршень изготовлены из стали, плотность которой 7800 кг/м^3 . Поршень может скользить без трения со стенками сосуда. Считать массу воздуха в сосуде намного меньшей, чем масса сосуда с поршнем.



По закону Гей-Люссака:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad T_2 = V_2 \frac{T_1}{V_1}$$

При понижении температуры воды, воздух в сосуде будет изобарно охлаждаться, объем воздуха уменьшится.

Тогда уменьшится суммарный объем воздуха и сосуда.

Силы натяжения нитей станут равными нулю.

Тело будет тонуть при условии, что $F_A < mg$.

Сила Архимеда: $F_A = \rho_0 g V$, где $V = V_c + V_2$.

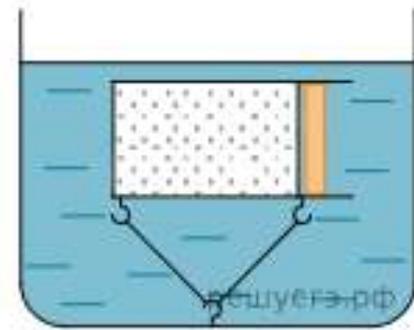
Объем сосуда с поршнем $V_c = \frac{m}{\rho}$

Отсюда: $\rho_0 \left(\frac{m}{\rho} + V_2 \right) < m \quad V_2 < \frac{m(\rho - \rho_0)}{\rho \rho_0}$

Значит, температура воды:

$$T_2 < \frac{m(\rho - \rho_0)T_1}{\rho \rho_0 V_1} = \frac{2,2 * (7,8 - 1) * 10^3 * 291}{10^3 * 7,8 * 10^3 * 2 * 10^{-3}} \approx 279 \text{ К}$$
$$t_2 < 6^\circ\text{C}$$

Ответ: ниже 6°C



5. В сосуде под поршнем находится влажный воздух при давлении $p_1 = 120$ кПа и температуре $t = 80$ °С с относительной влажностью $\varphi = 70\%$. Объём под поршнем уменьшают в три раза при постоянной температуре. Каким станет давление влажного воздуха под поршнем? Давление насыщенных паров воды $p_{\text{нп}}$ при температуре $t = 80$ °С равно 47,3 кПа.

Первоначальное давление водяных паров: $\varphi = \frac{p_{1\text{н}}}{p_{\text{нп}}}$ $p_{1\text{н}} = \varphi p_{\text{нп}}$

По условию температура в сосуде постоянна, поэтому давление насыщенного пара в сосуде остается неизменным.

При изотермическом уменьшении объема давление должно увеличиваться. Это будет происходить до тех пор, пока пар не станет насыщенным.

Давление сухого пара будет также увеличиваться изотермически.

По закону Бойля-Мариотта $p_1 c V_1 = p_2 c V_2$

Так как $V_1 = 3V_2$, то $p_2 c = 3p_1 c$

Уравнение Дальтона для обоих случаев: $p_1 = \varphi p_{\text{нп}} + p_{1c}$ $p_2 = p_{\text{нп}} + p_{2c}$

Отсюда конечное давление влажного воздуха в сосуде:

$$p_2 = 3p_1 - p_{\text{нп}}(3\varphi - 1) = 3 * 120 - 47,3 * (3 * 0,7 - 1) = 307,97 \text{ кПа}$$

Ответ: 307,97 кПа.

6. В сосуде с небольшой трещиной находится воздух. Воздух может медленно просачиваться сквозь трещину. Во время опыта объем сосуда уменьшили в 8 раз, давление воздуха в сосуде увеличилось в 2 раза, а его абсолютная температура увеличилась в 1,5 раза. Во сколько раз изменилась внутренняя энергия воздуха в сосуде? (Воздух считать идеальным газом.)

Внутренняя энергия газа пропорциональна его температуре и количеству вещества (газа) в сосуде: $U \sim \nu \cdot T$.

Из уравнения Клапейрона — Менделеева, $\nu \sim \frac{pV}{T}$.

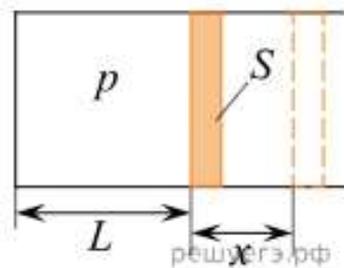
Значит, $U \sim \frac{pV \cdot T}{T} \sim pV$.

По условию задачи, p возросло в 2 раза, а V уменьшилось в 8 раз.

Отсюда, U уменьшилась в 4 раза.

Ответ: внутренняя энергия воздуха в сосуде уменьшилась в 4 раза.

7. В горизонтальном цилиндрическом сосуде, закрытом поршнем, находится одноатомный идеальный газ. Первоначальное давление газа $p = 4 \cdot 10^5$ Па. Расстояние от дна сосуда до поршня равно L . Площадь поперечного сечения поршня $S = 25$ см². В результате медленного нагревания газ получил количество теплоты $Q = 1,65$ кДж, а поршень сдвинулся на расстояние $x = 10$ см. При движении поршня на него со стороны стенок сосуда действует сила трения величиной $F_{\text{тр}} = 3 \cdot 10^3$ Н. Найдите L . Считать, что сосуд находится в вакууме.



Поршень будет медленно двигаться, если сила давления газа на поршень и сила трения со стороны стенок сосуда уравновесят друг друга:

$$p_2 S = F_{\text{тр}} \quad p_2 = \frac{F_{\text{тр}}}{S} = 12 * 10^5 \text{ Па} > p_1$$

$$p_1 = p$$

Значит, при нагревании газа поршень будет неподвижен, пока давление газа не достигнет значения p_2 . В этом процессе газ получает количество теплоты Q_{12} .

Затем поршень будет сдвигаться, увеличивая объём газа, при постоянном давлении. В этом процессе газ получает количество теплоты Q_{23} .

В процессе нагревания, в соответствии с первым началом термодинамики, газ получит количество теплоты:

$$Q = Q_{12} + Q_{23} = (U_3 - U_1) + p_2 S x = (U_3 - U_1) + F_{\text{тр}} x$$

Внутренняя энергия одноатомного идеального газа:

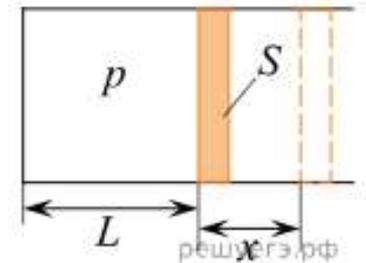
$$U_1 = \frac{3}{2} \nu R T_3 = \frac{3}{2} p_2 S (L + x) = \frac{3}{2} F_{\text{тр}} (L + x) \text{ в начальном состоянии,}$$

$$U_3 = \frac{3}{2} \nu R T_3 = \frac{3}{2} F_{\text{тр}} (L + x) \text{ в конечном состоянии.}$$

Отсюда:

$$L = \frac{Q - \frac{5}{2} F_{\text{тр}} x}{\frac{3}{2} (F_{\text{тр}} - p_1 S)} = \frac{1650 - 2.5 * 3000 * 0.1}{1.5(3000 - 400000 * 0.0025)} = 0,3 \text{ м}$$

Ответ: $L = 0,3 \text{ м}$.



8. В вертикальном цилиндре с гладкими стенками под массивным металлическим поршнем находится одноатомный идеальный газ. В начальном состоянии поршень массой M и площадью основания S покоится на высоте h , опираясь на выступы (см. рис. 1). Давление газа p_0 равно внешнему атмосферному. Какое количество теплоты Q нужно сообщить газу при медленном его нагревании, чтобы поршень оказался на высоте H (см. рис. 2)? Тепловыми потерями пренебречь.

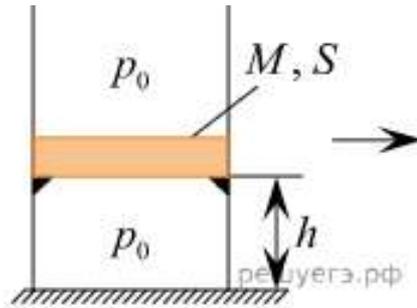


Рис. 1

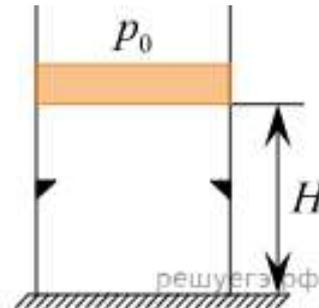
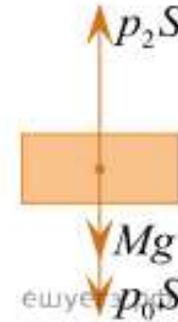


Рис. 2



Силы действующие на поршень в процессе движения.

До момента пока $p_2 S < p_0 S + Mg$ поршень будет покоиться, давление газа увеличиваться.

При достижении равновесия: $p_2 S = p_0 S + Mg$ поршень начнет двигаться вверх, т.к. нагревание медленное из-за чего процесс можно считать изобарным.

По первому закону термодинамики: $Q = A + \Delta U$

Изменение внутренней энергии: $\Delta U = \frac{3}{2} \nu R \Delta T$

Работа газа при изобарном расширении:

$$A = p_2 \Delta V = \left(p_0 + \frac{Mg}{S} \right) S(H - h) = (p_0 S + Mg)(H - h)$$

Пусть начальный объем: $V_0 = Sh$, конечный объем: $V = SH$

Уравнение Клайперона-Менделеева: $p_0 V_0 = \nu RT_0$ $p_2 V = \nu RT_2$

Отсюда: $(p_0 S + Mg)H - p_0 Sh = \nu R \Delta T$

Изменение внутренней энергии:

$$\Delta U = \frac{3}{2} ((p_0 S + Mg)H - p_0 Sh)$$

Полученное газом количество теплоты:

$$Q = \frac{3}{2} ((p_0 S + Mg)H - p_0 Sh) + (p_0 S + Mg)(H - h)$$
$$Q = 2,5 p_0 S(H - h) + Mg(2,5H - h)$$

Ответ: $Q = 2,5 p_0 S(H - h) + Mg(2,5H - h)$

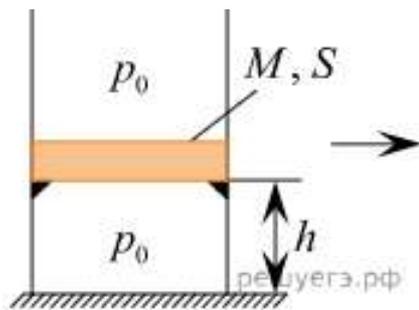


Рис. 1

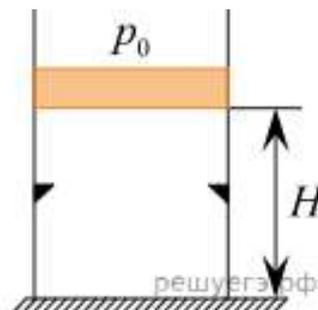
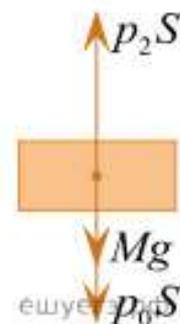


Рис. 2



9. В калориметр, содержащий $M = 250$ г воды при температуре $t_1 = 20$ °С, опускают железный шар массой $m = 100$ г, находящийся при температуре $t_2 = 600$ °С. Какая температура t_3 установится в калориметре после достижения теплового равновесия? Считайте, что при контакте раскалённого металла с водой она быстро превращается в пар и образовавшиеся пары воды сразу улетучиваются. Другими потерями теплоты можно пренебречь.

По условию задачи по мере быстрого охлаждения шара от $t_2 = 600^\circ\text{C}$ до температуры $t_{\text{кип}} = 100^\circ\text{C}$ вода в калориметре будет бурно кипеть, а образовавшиеся пары — улетучиваться.

Уравнение теплового баланса на первой стадии:

$$c_{\text{ж}}m(t_2 - t_{\text{кип}}) = m_{\text{п}}r_{\text{в}} + m_{\text{п}}c_{\text{в}}(t_{\text{кип}} - t_1)$$

Отсюда масса образовавшегося пара:

$$m_{\text{п}} = \frac{c_{\text{ж}}m(t_2 - t_{\text{кип}})}{r_{\text{в}} + m_{\text{п}}c_{\text{в}}(t_{\text{кип}} - t_1)} = \frac{460 * 0,1 * 500}{2,3 * 10^6 + 4200 * 80} \approx 8,7 \text{ г}$$

На второй стадии процесса шар охлаждается от температуры кипения воды до конечной температуры t_3 , а оставшаяся вода нагревается до той же искомой температуры.

Уравнение теплового баланса на второй стадии:

$$c_{\text{ж}}m(t_{\text{кип}} - t_3) = c_{\text{в}}(M - m_{\text{п}})(t_3 - t_1)$$

Отсюда:

$$t_3 = \frac{c_{\text{ж}}mt_{\text{кип}} + c_{\text{в}}(M - m_{\text{п}})t_1}{c_{\text{ж}}m + c_{\text{в}}(M - m_{\text{п}})} = \frac{460 * 0,1 * 100 + 4200 * 0,2413 - 20}{460 * 0,1 + 4200 * 0,2413} \approx 23,5^\circ\text{C}$$

Ответ: $23,5^\circ\text{C}$

10. В запаянной с одного конца трубке находится влажный воздух, отделённый от атмосферы столбиком ртути длиной $l = 76$ мм. Когда трубка лежит горизонтально, относительная влажность воздуха φ_1 в ней равна 80%. Какой станет относительная влажность этого воздуха φ_2 , если трубку поставить вертикально, открытым концом вниз? Атмосферное давление равно 760 мм рт. ст. Температуру считать постоянной.

Относительная влажность в трубке в первом случае: $\varphi_1 = \frac{p_1}{p_H}$

Для второго случая: $\varphi_2 = \frac{p_2}{p_H}$

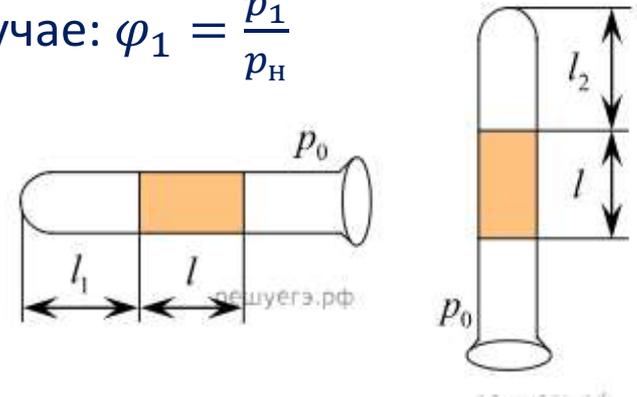
Давление влажного воздуха в первом случае равно атмосферному: $p_{1\text{вл}} = p_0$

Во втором случае: $p_{2\text{вл}} = p_0 - \rho g l$

$$p_0 = \rho g H \quad H = 760 \text{ мм}$$

Объем влажного воздуха при изменении положения трубки изменился так, как изменились длины столбиков воздуха, запертых ртутью.

По закону Бойля-Мариотта: $\frac{V_2}{V_1} = \frac{l_2}{l_1} = \frac{p_0}{p_0 - \rho g l}$



Из уравнения Клайперона-Менделеева:

$$p = \frac{\nu RT}{V} \quad p_{\text{вл}} = \frac{(\nu + \nu_{\text{св}})RT}{V}$$

Отсюда: $\frac{p}{p_{\text{вл}}} = \frac{\nu}{\nu + \nu_{\text{св}}} = \text{const}$

Значит: $\frac{p_1}{p_2} = \frac{p_{1\text{вл}}}{p_{2\text{вл}}}$

Для изотермического процесса для парциальных давлений водяного пара:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{p_0}{p_0 - \rho g l}$$

Отсюда, относительная влажность воздуха во втором случае:

$$\varphi_2 = \varphi_1 \frac{p_0 - \rho g l}{p_0} = \varphi_1 \frac{\rho g H - \rho g l}{\rho g H} = \varphi_1 \frac{H - l}{H} = 80 \frac{760 - 76}{760} = 72\%$$

Ответ: 72%

11. В вертикальном цилиндре, закрытом лёгким поршнем, находится бензол C_6H_6 при температуре кипения $t = 80^\circ C$. При сообщении бензолу количества теплоты Q часть его превращается в пар, который при изобарном расширении совершает работу A . Удельная теплота парообразования бензола $L = 396 \cdot 10^3$ Дж/кг, его молярная масса $M = 78 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Какая часть подведённого к бензолу количества теплоты переходит в работу? Объёмом жидкого бензола пренебречь.

Первый закон термодинамики: $Q = \Delta U + A$

При кипении бензола происходит его изобарное расширение.

Работа пара: $A = p\Delta V$

Уравнение Клайперона-Менделеева: $p\Delta V = \frac{\Delta m}{M} RT$

Молярная масса бензола: $M = 78 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

Температура кипения бензола: $T = 80 + 273 = 353$ К

Отсюда: $A = \frac{\Delta m RT}{M}$

Количество теплоты, необходимое для испарения бензола: $Q = \Delta mL$

Отсюда: $\eta = \frac{A}{Q} = \frac{RT}{ML} = \frac{8,31 \cdot 353}{78 \cdot 10^{-3} \cdot 396 \cdot 10^3} \approx 0,095$

Ответ: 0,095

12. Определить массу воды m , которую теряет человек за 1 ч в процессе дыхания, исходя из следующих данных. Относительная влажность вдыхаемого воздуха $\varphi_1 = 60\%$ относительная влажность выдыхаемого воздуха $\varphi_2 = 100\%$. Человек делает в среднем $n = 15$ вдохов в минуту, выдыхая каждый раз 2,5 л воздуха. Температура вдыхаемого и выдыхаемого воздуха принять 36°C , давление насыщенного водяного пара при этой температуре 5,9 кПа. Молярная масса воды 18 г/моль.

Давление вдыхаемого воздуха: $p = \varphi p_{\text{нп}}$

Из уравнения Клайперона-Менделеева: $pV = \frac{m_1 RT}{M}$

Отсюда, масса вдыхаемого воздуха за один вдох:

$$m_1 = \frac{\varphi p_{\text{нп}} VM}{RT}$$

При выдохе пар насыщенный, значит, его давление равно давлению насыщенного пара.

Масса выдыхаемого за один выдох воздуха: $m_2 = \frac{p_{\text{нп}} VM}{RT}$

Количество вдохов-выдохов за один час: $15 \text{ вд/мин} * 60 \text{ мин} = 900$

Отсюда, за 1 час тело человека потеряет массу:

$$\Delta m = 900 \frac{p_{\text{нп}} VM}{RT} (1 - \varphi) = \frac{900 * 5,9 * 10^3 * 18 * 10^{-3} * 2,5 * 10^{-3} (1 - 0,6)}{8,31 * 309} \approx 0,037 \text{ кг} = 37 \text{ г}$$

Ответ: 37 г