Задание №22

Механика (расчетная задача)

1. Подвешенный на нити грузик совершает гармонические колебания. В таблице представлены координаты грузика через одинаковые промежутки времени. Какова, примерно, максимальная скорость грузика? Ответ укажите в метрах в секунду с точностью до двух знаков после запятой.

t, c	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
x, см	6	3	0	3	6	3	0	3

Максимальная скорость груза маятника:

$$v_{max} = x_{max}\omega_0$$

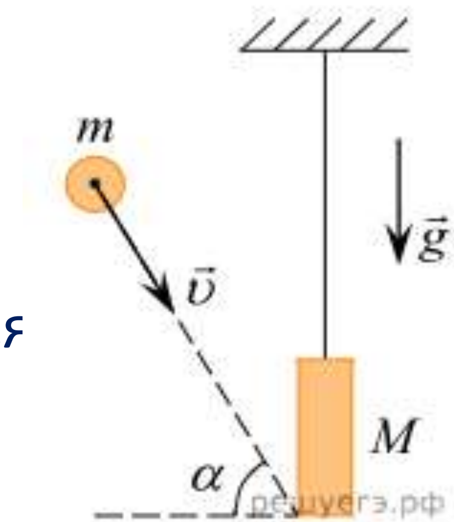
Из таблицы: в положении равновесии смещение равно 3 см, амплитуда колебаний $x_{max} = 3$ см, а период $T = 2c$

Циклическая частота: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ рад/с

$v_{max} = 0{,}03 * 3{,}14 \approx 0{,}09$ м/с

Ответ: 0,09 м/с

2. Доска массой 0,8 кг шарнирно подвешена к потолку на легком стержне. На доску со скоростью 10 м/с налетает пластилиновый шарик массой 0,2 кг и прилипает к ней. Скорость шарика перед ударом направлена под углом 60° к нормали к доске (см. рис.). Чему равна высота подъема доски относительно положения равновесия после соударения? Ответ укажите в метрах с точностью до двух знаков после запятой.



Закон сохранения импульса:

$$mv\,cos\alpha = (m + M)u$$

$$u = \frac{mv\,cos\alpha}{m+M} = \frac{0{,}2*10*cos60°}{0{,}2+0{,}8} = 1 \text{ м/с}$$

После удара доска с шариком отклоняется
маятник.

Закон сохранения энергии:

$$\frac{(m + M)u^2}{2} = (m + M)gh$$

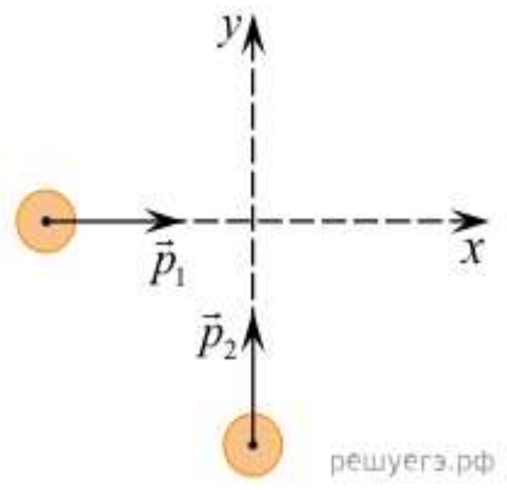
$$h = \frac{u^2}{2g} = \frac{1}{2*10} = 0{,}05 \text{ м}$$

Ответ: 0,05 м

3. По гладкой горизонтальной плоскости по осям x и y движутся две шайбы с импульсами, равными по модулю $p_1 = 2\,\text{кг}\cdot\text{м/с}$ и $p_2 = 3{,}5\,\text{кг}\cdot\text{м/с}$ как показано на рисунке. После соударения вторая шайба продолжает двигаться по оси y в прежнем направлении с импульсом, равным по модулю $p_3 = 2\,\text{кг}\cdot\text{м/с}$ Найдите модуль импульса первой шайбы после удара. Ответ укажите в кг · м/с с точностью до одного знака после запятой.

По условию, после удара вторая шайба продолжает движение вдоль оси Y с импульсом меньшим: $\Delta p = p_2 - p_3$

Модуль импульса первой шайбы после удара:



$$p_2 = \sqrt{p_1^2 + \Delta p^2} = \sqrt{p_1^2 + (p_2 - p_3)^2} =$$

$$= \sqrt{2^2 + (3{,}5 - 2)^2} = 2{,}5 \text{ кг*м/с}$$

Ответ: 2,5 кг*м/с

4. Пуля массой 10 г, летящая со скоростью 200 м/с, пробивает доску толщиной 2 см и вылетает со скоростью 100 м/с. Определите силу сопротивления доски, считая ее постоянной. Ответ приведите в ньютонах.

Закон сохранения энергии: $E_{k2} - E_{k1} = A_{\text{сопр}}$

Сила сопротивления доски: $F_{\text{сопр}} = \frac{A_{\text{сопр}}}{d} = \frac{E_{k2} - E_{k1}}{d}$

$$F_{\text{сопр}} = \frac{m(v_1^2 - v_2^2)}{2d} = \frac{0{,}01(200^2 - 100^2)}{2 * 0{,}02} = 7500\ H$$

Ответ: 7500 Н

5. Две одинаковые звуковые волны частотой 1 кГц распространяются навстречу друг другу. Расстояние между источниками волн очень велико. В точках *A* и *B*, расположенных на расстоянии 99 см друг от друга, амплитуда колебаний минимальна. На каком расстоянии от точки *A* находятся ближайшие к ней точки, в которой амплитуда колебаний также минимальна? Скорость звука в воздухе 330 м/с. Ответ укажите в метрах.

Расстояние между ближайшими минимумами равно половине длины волны.

$$l = \frac{v}{2\nu} = \frac{330}{2 \cdot 10^3} = 0{,}165 \text{ м}$$

Ответ: 0,165 м

6. Груз начинает свободно падать с некоторой высоты без начальной скорости. Пролетев 40 м, груз приобрёл скорость 20 м/с. Чему, на этом участке пути, равно отношение изменения кинетической энергии груза к работе силы сопротивления воздуха?

Изменение кинетической энергии груза:

$$\Delta E_k = \frac{mv^2}{2} - 0 = \frac{mv^2}{2}$$

Сила сопротивления совершает отрицательную работу, равную изменению полной механической энергии:

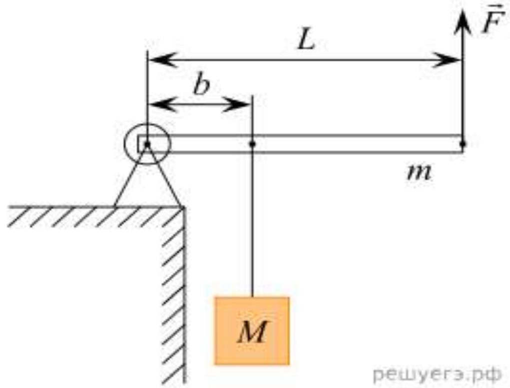
$$\Delta E = \Delta E_{\text{п}} + \Delta E_{\text{к}} = 0 - mgh + \frac{mv^2}{2}$$

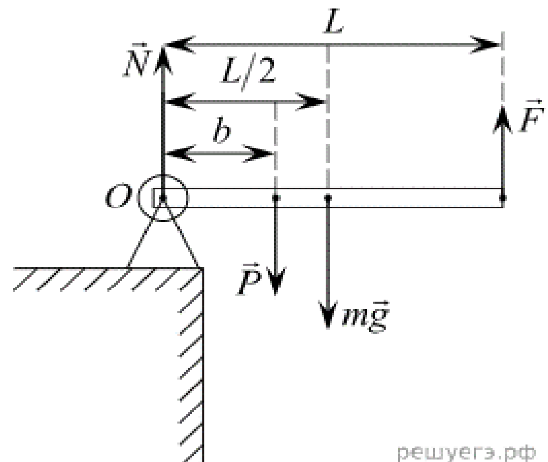
Отсюда:

$$\frac{\Delta E_k}{\Delta E} = \frac{mv^2}{2} : \left(-mgh + \frac{mv^2}{2}\right) = -\frac{v^2}{2gh - v^2} = -\frac{20^2}{2 * 10 * 40 - 20^2} = -1$$

Ответ: -1

7. Груз массой $M = 75$ кг медленно поднимают с помощью рычага, приложив вертикальную силу $\vec{F}$ (см. рис.). Рычаг, сделанный из однородного стержня массой $m = 10$ кг и длиной $L = 4$ м, шарнирно закреплён. Определите модуль силы $\vec{F}$, если расстояние b от оси шарнира до точки подвеса груза равно 1,6 м. Считать, что трение в шарнире отсутствует.





Считая, что рычаг поднимает груз медленно и равномерно и учитывая второй и третий закон Ньютона:

$$|\vec{P}| = |M\vec{g}|$$

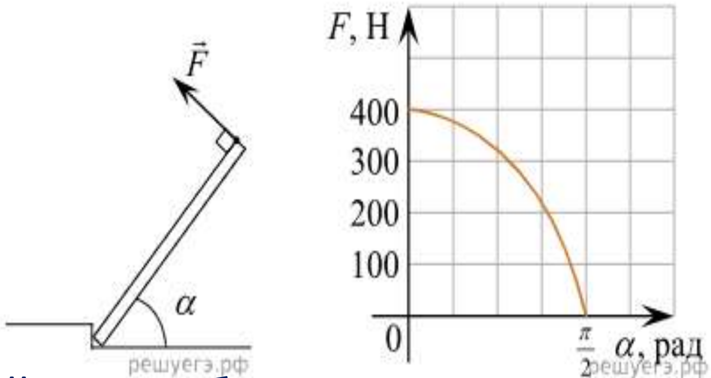
Равновесие рычага относительно оси вращения – шарнира О:

$$Mg \cdot b + \frac{1}{2}mg \cdot L - FL = 0$$

$$F = Mg \cdot \frac{b}{L} + \frac{1}{2}mg = 75 * 10 * \frac{1,6}{4} + \frac{1}{2} * 10 * 10 = 350\ H$$

Ответ: 350 Н

8. Однородную балку поднимают за один конец, прикладывая силу $\vec{F}$ перпендикулярно балке. На рисунке показан график изменения модуля силы по мере подъема конца балки. Чему равна масса балки? Ответ приведите в килограммах.



Для того, чтобы правый конец балки начал подниматься, вращающий момент, создаваемый силой $\vec{F}$ относительно левого конца балки, должен стать больше момента, создаваемого силой тяжести относительно этой точки.

Так как балка однородна, то ее центр масс расположен посередине.

Моменты сил: $Mg\frac{L}{2} = FL$

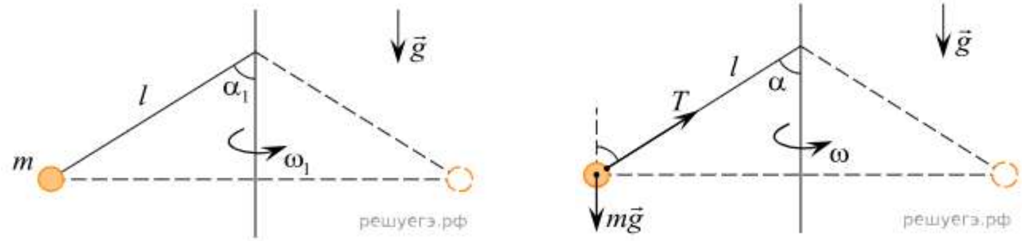
$$M = \frac{2F}{g}$$

Из графика: $F = 400\ H$

$M = \frac{2*400}{10} = 80$ кг

Ответ: 80 кг

9. Конический маятник представляет собой маленький грузик массой m = 100 г, вращающийся с угловой скоростью ω_1 вокруг вертикальной оси на невесомой нерастяжимой нити длиной l, составляющей с этой осью угол $\alpha_1 = 60$ (см. рис.). Во сколько раз надо увеличить угловую скорость вращения маятника, чтобы нить порвалась, если она выдерживает максимальную силу натяжения, равную nmg, где n = 4?



Уравнения движения грузика на вертикальную ось: $T cos\alpha = mg$

По горизонтали – вращательное движение вокруг неподвижной оси на расстояние: $r = l sin\alpha$

Уравнение движение по горизонтали: $m\omega^2 l sin\alpha = T sin\alpha$

$$T = m\omega^2 l \qquad T = \frac{mg}{cos\alpha}$$

Отсюда: $cos\alpha = \frac{mg}{T}$ $\qquad \omega^2 = \frac{g}{l cos\alpha} = \frac{T}{ml}$

В первом случае: $cos\alpha_1 = \frac{1}{2}$, поэтому $T_1 = 2mg$ $\qquad \omega_1^2 = \frac{2g}{l}$

Во втором случае: $T_2 = nmg = 4mg$ $\qquad \omega_2^2 = \frac{4g}{l}$

Отсюда: $\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} = 2$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{2} \approx 1{,}41 \text{ – при этом условии нить порвется}$$

Ответ: 1,41

10. На шероховатой горизонтальной плоскости находится грузик, привязанный невесомой нерастяжимой тонкой нитью длиной r = 50 см к гвоздику, вбитому в плоскость. Коэффициент трения грузика о плоскость равен $\mu = 0{,}15$. Нить натягивают, и грузику толчком в горизонтальном направлении, перпендикулярном нити, сообщают скорость V = 3 м/с (см. рис.). На какой угол φ повернется нить к моменту остановки грузика?

Кинетическая энергия грузика: $E_{\text{к}} = \frac{mV^2}{2}$

Она будет расходоваться на работу против силы трения скольжения.

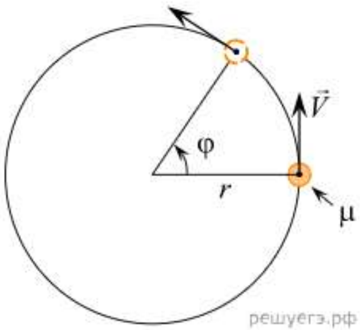
Теорема о кинетической энергии: $A_{\text{тр}} = \Delta E_{\text{к}}$ (пока грузик не остановится)

Сила трения скольжения будет все время направлена против скорости грузика:

$$F_{\text{тр}} = \mu \mathrm{T} = \mu m g$$

Работа силы трения: $A_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}} S = -\mu m g S$

Сила натяжения нити, «поворачивающая» направление вектора скорости, так как она ему перпендикулярна, то работы совершать не будет.



Угол поворота нити: $\varphi = \frac{S}{r}$ $\quad S = \varphi r$

Отсюда: $-\mu m g \varphi r = -\frac{mV^2}{2}$

$$-\mu g \varphi r = -\frac{V^2}{2}$$

$$\varphi = \frac{V^2}{2\mu g r} = \frac{9}{2 * 0{,}15 * 10 * 0{,}5} = 6 \text{ рад} \approx 344^\circ$$

Ответ: 344°

11. В начале астрономического исследования Солнечной системы в 1766 г. немецким физиком И. Тициусом было сформулировано правило, приблизительно описывающее расстояния планет от Солнца. В 1781 г. после открытия Урана, большая полуось орбиты которого точно соответствовала этому правилу, И. Э. Боде предположил о возможности существования пятой от Солнца планеты между орбитами Марса и Юпитера на расстоянии 2,8 а. е. от нашего светила, которая и до сих пор не была обнаружена. Вместо неё образовался пояс астероидов, которые не смогли «слипнуться» в планету из-за влияния тяготения массивного Юпитера. Каков был бы период обращения этой несостоявшейся планеты вокруг Солнца в земных годах? 1 а. е. = 150 млн. км — среднее расстояние от Земли до Солнца. Орбиты планет можно считать окружностями, лежащими в одной плоскости, с центром в Солнце.

Уравнение вращательного движения Земли вокруг Солнца под действием силы тяготения:

$$\frac{GM_c m_з}{R_з^2} = m_з \omega_з^2 R_з = \frac{4\pi^2 m_з R_з}{T_з^2}$$

$$\frac{GM_c}{R_з^2} = \frac{4\pi^2 R_з}{T_з^2}$$

Отсюда: $\frac{R_з^3}{T_з^2} = \frac{GM_c}{4\pi^2}$

Аналогично для «несостоявшейся» планеты Х между Марсом и Юпитером:

$$\frac{R_з^3}{T_з^2} = \frac{R_х^3}{T_х^2}$$

Отсюда: $T_x = T_3 \left(\frac{R_x}{R_з}\right)^{3/2} = (2{,}8)^{3/2} * 1 \approx 4{,}7$ года

Ответ: 4,7 года

12. В велотренажерах для регулировки физической нагрузки тренирующихся на них спортсменов в настоящее время часто используются электродинамические тормозящие устройства, позволяющие плавно регулировать усилия, необходимые для вращения педалей с определённой скоростью. Вращение от педалей передаётся на массивный токопроводящий диск, находящийся между двумя сильными неподвижными магнитами, расстояние от которых до диска можно регулировать. Взаимодействие возникающих в диске индукционных токов с магнитами тормозит вращение диска, а, следовательно, и педалей, заставляя прикладывать к ним регулируемые по величине силы.

Пусть спортсмен крутит педали, находящиеся на расстоянии $R = 20$ см от их оси вращения, с частотой $\nu = 15$ оборотов в минуту, прикладывая к каждой из педалей в направлении её движения постоянную по модулю вращающую силу $F = 50$ Н. На сколько градусов нагреется алюминиевый диск массой $m = 5$ кг за время $t = 30$ минут работы в таком режиме? Считайте, что вся работа спортсмена расходуется только на равномерный разогрев диска.

12. Пусть спортсмен крутит педали, находящиеся на расстоянии R = 20 см от их оси вращения, с частотой ν = 15 оборотов в минуту, прикладывая к каждой из педалей в направлении её движения постоянную по модулю вращающую силу F = 50 Н. На сколько градусов нагреется алюминиевый диск массой m = 5 кг за время t = 30 минут работы в таком режиме? Считайте, что вся работа спортсмена расходуется только на равномерный разогрев диска.

Мощность, которую развивает спортсмен во время тренировки на велотренажере: $P = 2Fv$ (для двух педалей)

$$v = \omega R \qquad \omega = 2\pi\nu$$

$$P = 2F\omega R = 4\pi\nu FR$$

Работа, совершенная спортсменом за время t: $A = Pt = 4\pi\nu FRt$

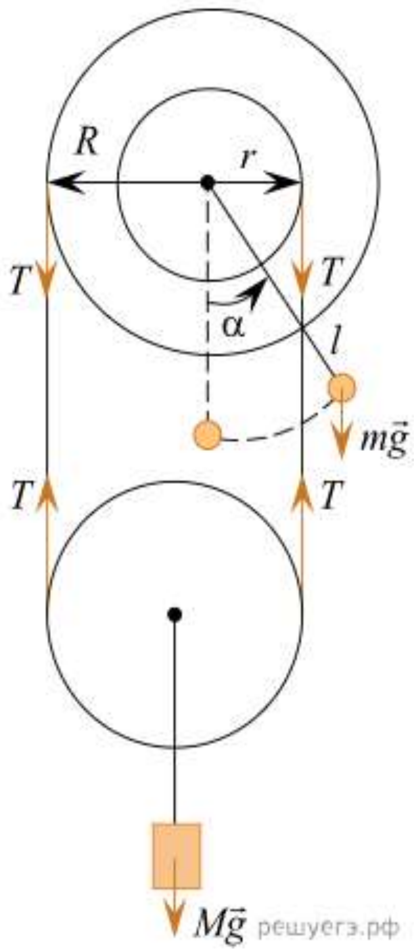
Так как вся работа превращается в количество теплоты, идущее на нагревание алюминиевого диска массой m с удельной теплоемкостью c на ΔT градусов, то:

$$A = Q = cm\Delta T = 4\pi\nu FRt$$

Отсюда: $\Delta T = \frac{4\pi\nu FRt}{cm} = \frac{4*3{,}14*0{,}25*50*0{,}2*1800}{900*5} = 12{,}56°$

Ответ: 12,56°

13. В механической системе, изображённой на рисунке, двухступенчатый блок с радиусами $r = 10$ см и $R = 20$ см может вращаться без трения вокруг неподвижной горизонтальной оси. К блоку прикреплена лёгкая штанга длиной $l = 25$ см, на конце которой расположен маленький груз массой $m = 400$ г, а на ступени блока намотана невесомая нерастяжимая нить, концы которой закреплены на блоке. На нити под этим блоком висит очень лёгкий подвижный блок радиусом 15 см, который может вращаться без трения вокруг своей оси, к которой подвешен груз массой $M = 0{,}9$ кг. Вначале штангу удерживали в вертикальном положении, а затем отпустили, и после затухания колебаний в системе штанга в положении равновесия оказалась отклонённой от вертикали на угол α. Чему равен этот угол?



Из условия равновесия для нижнего блока: $2T = Mg$

Для верхнего сложного блока со штангой и грузом сумма моментов: $TR = Tr + mglsin\alpha$

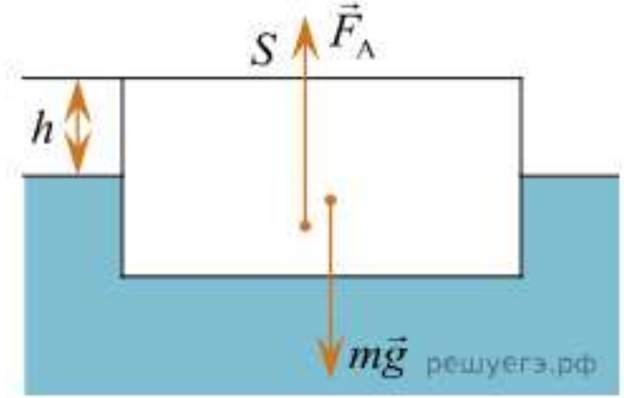
Отсюда: $T = \frac{Mg}{2}$ $mglsin\alpha = T(R-r) = \frac{Mg(R-r)}{2}$

$$sin\alpha = \frac{M(R-r)}{2ml} = \frac{0{,}9(0{,}2-0{,}1)}{2*0{,}4*0{,}25} = 0{,}45$$

$$\alpha = arcsin0{,}45 \approx 26{,}7°$$

Ответ: 26,7°

14. Плоская льдина плавает в воде, выступая над её поверхностью на h = 0,02 м. Определите массу льдины, если площадь её поверхности S = 2500 см^2. Плотность льда равна 900 кг/м^3.



Так как льдина плавает:

$$F_A = F_{тяж}$$

$$\rho_в g(H - h)S = m_л g$$

H – толщина льдины

$$\rho_в g(H - h)S = \rho_л HSg$$

$$H = \frac{\rho_в h}{\rho_в - \rho_л}$$

$$m = \rho_л \frac{\rho_в hS}{\rho_в - \rho_л} = \frac{1000 * 900 * 2500 * 10^{-4} * 0{,}02}{1000 - 900} = 45 \text{ кг}$$

Ответ: 45 кг