

## 08. Производная и первообразная

### Блок 1. ФИПИ ([www.fipi.ru](http://www.fipi.ru))

#### I) Физический смысл производной

**Задание 1.** Материальная точка движется прямолинейно по закону  $x(t) = \frac{1}{2}t^2 + 4t + 27$ , где  $x$  – расстояние от точки отсчёта в метрах,  $t$  – время в секундах, измеренное с момента начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени  $t = 2$  с.

**Задание 2.** Материальная точка движется прямолинейно по закону  $x(t) = \frac{1}{3}t^2 - 2t + 44$ , где  $x$  – расстояние от точки отсчёта в метрах,  $t$  – время в секундах, измеренное с момента начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени  $t = 6$  с.

**Задание 3.** Материальная точка движется прямолинейно по закону  $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 5t^2 + 45t + 130$ , где  $x$  – расстояние от точки отсчёта в метрах,  $t$  – время в секундах, измеренное с момента начала движения. В какой момент времени её скорость была равна 20 м/с?

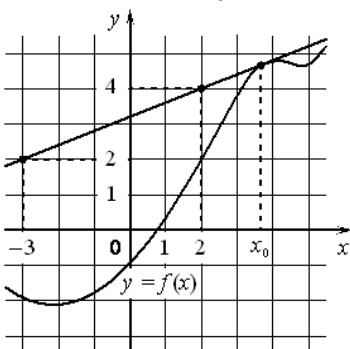
**Задание 4.** Материальная точка движется прямолинейно по закону  $x(t) = \frac{1}{6}t^3 + t^2 - 8t + 180$ , где  $x$  – расстояние от точки отсчёта в метрах,  $t$  – время в секундах, измеренное с момента начала движения. В какой момент времени её скорость была равна 40 м/с?

**Задание 5.** Материальная точка движется прямолинейно по закону  $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t - 190$ , где  $x$  – расстояние от точки отсчёта в метрах,  $t$  – время в секундах, измеренное с момента начала движения. В какой момент времени её скорость была равна 48 м/с?

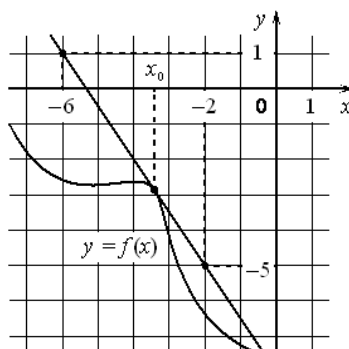
**Задание 6.** Материальная точка движется прямолинейно по закону  $x(t) = \frac{1}{6}t^3 - 2t^2 + 6t + 250$ , где  $x$  – расстояние от точки отсчёта в метрах,  $t$  – время в секундах, измеренное с момента начала движения. В какой момент времени её скорость была равна 96 м/с?

#### II) Геометрический смысл производной, касательная

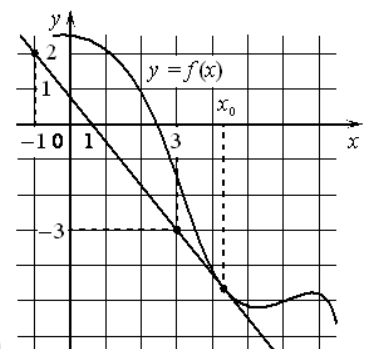
**Задание 7.** На рисунке изображены график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .



1)

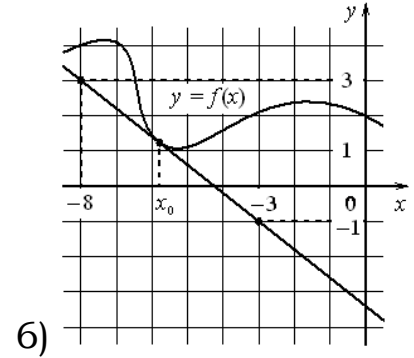
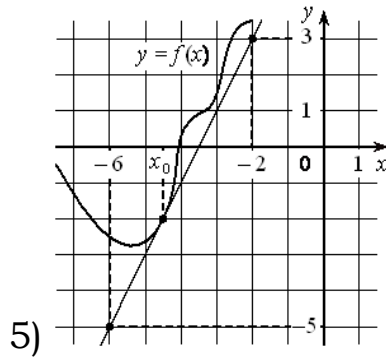
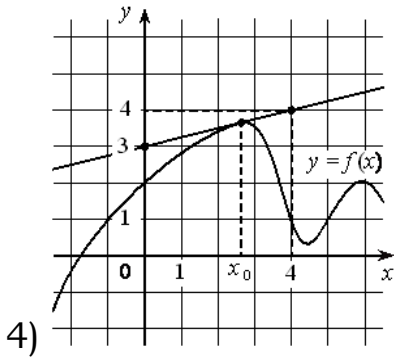


2)

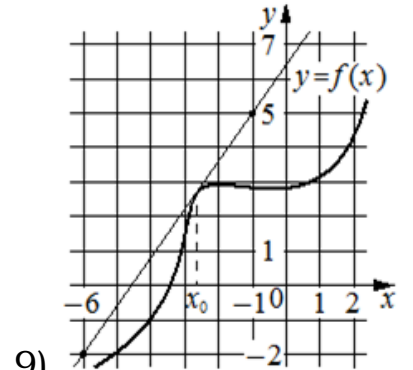
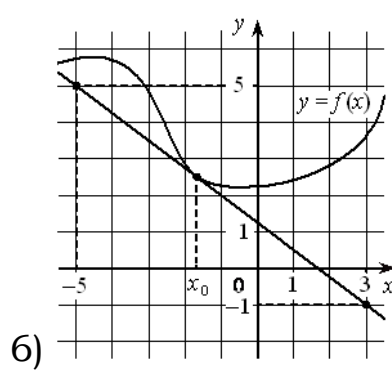
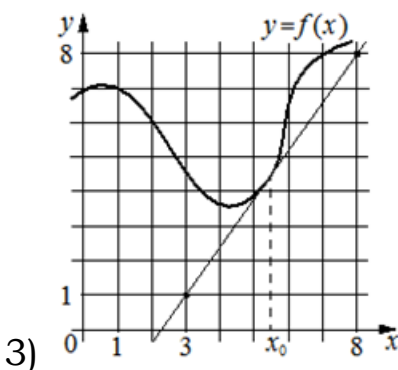
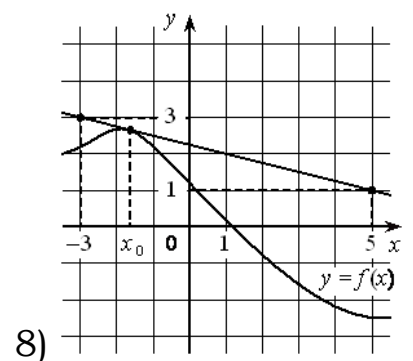
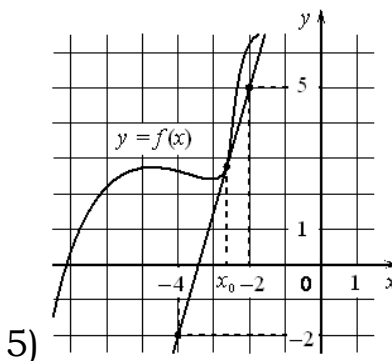
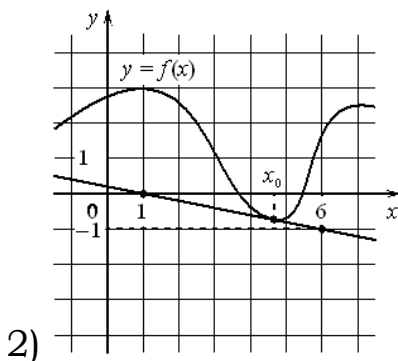
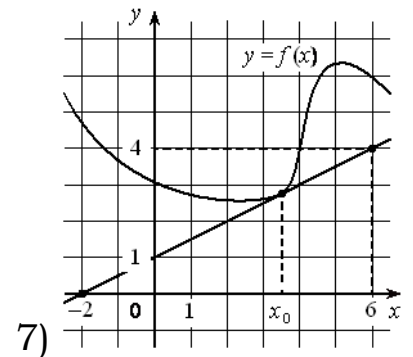
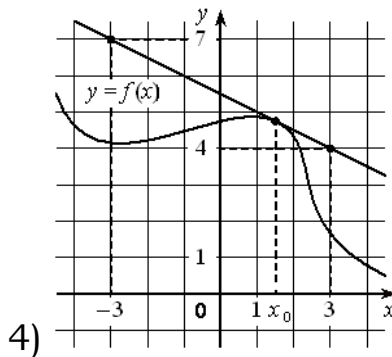
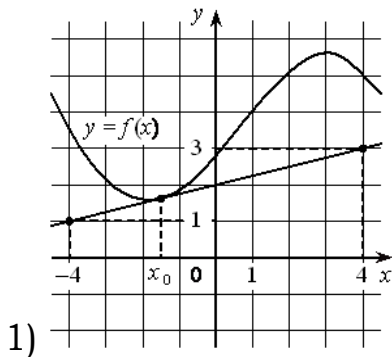


3)

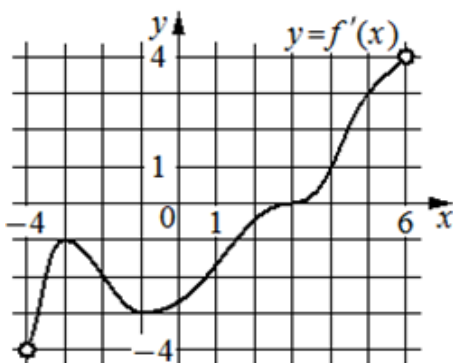
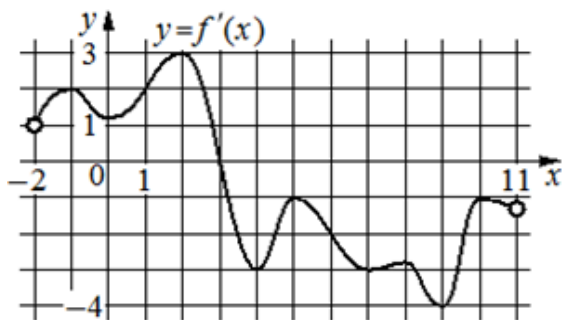
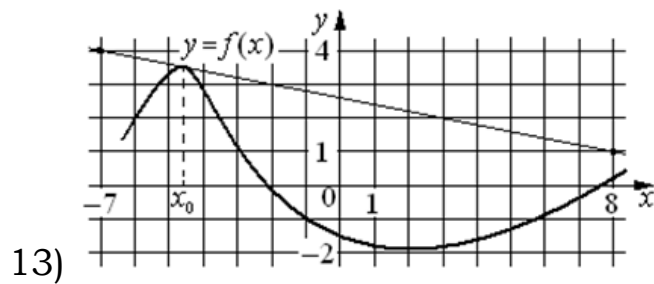
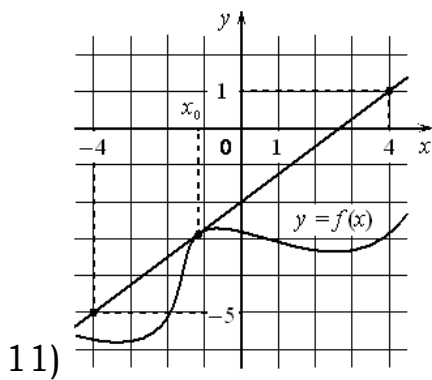
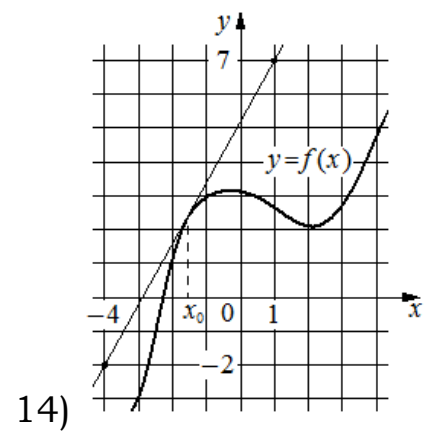
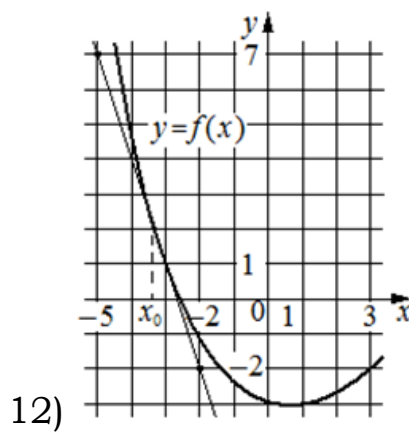
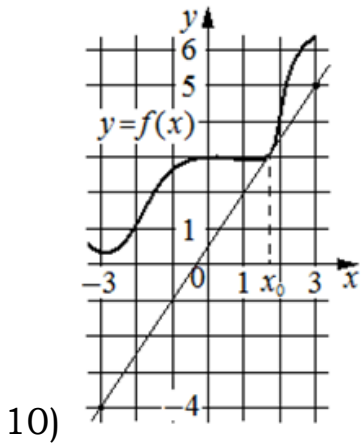
**Задание 7.** На рисунке изображены график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .



**Задание 8.** На рисунке изображены график дифференцируемой функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .



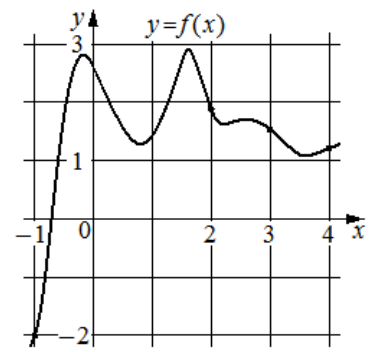
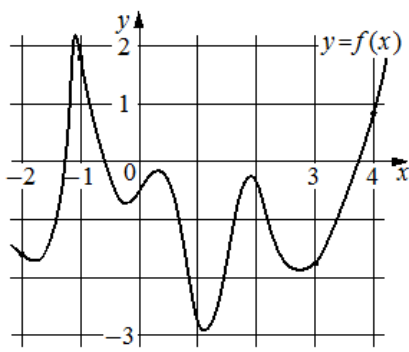
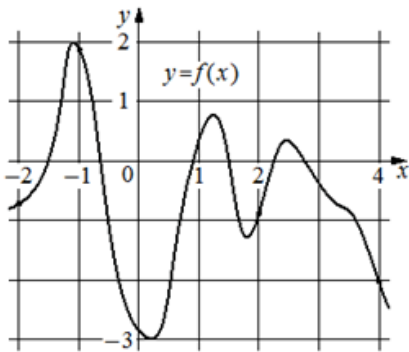
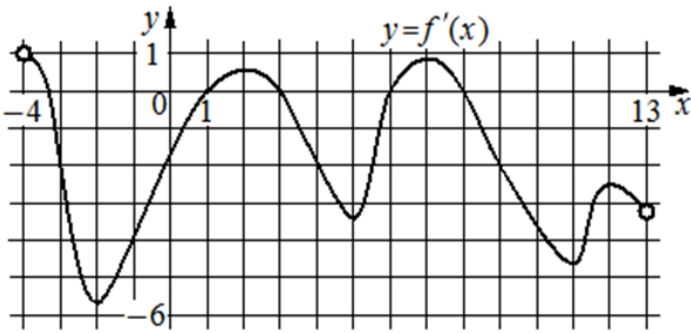
**Задание 8.** На рисунке изображены график дифференцируемой функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .



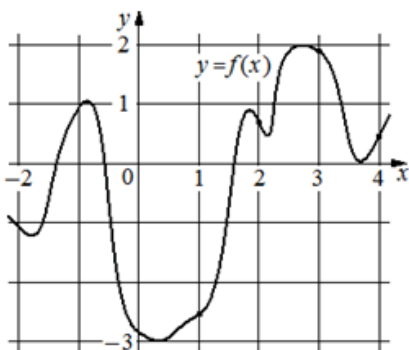
**Задание 9.** На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-2; 11)$ . Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции  $y = f(x)$  параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.

**Задание 10.** На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-4; 6)$ . Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции  $y = f(x)$  параллельна прямой  $y = 3x$  или совпадает с ней.

**Задание 11.** На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-4; 13)$ . Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции  $y = f(x)$  ...  
 а) параллельна прямой  $y = 14$ ;  
 б) параллельна прямой  $y = -2x - 10$  или совпадает с ней.



**Задание 12.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ . На оси абсцисс отмечены точки  $-2, -1, 2, 4$ . В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.

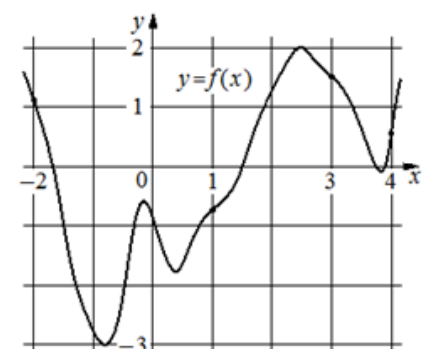


**Задание 13.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ . На оси абсцисс отмечены точки  $-2, -1, 3, 4$ . В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.

**Задание 15.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ . На оси абсцисс отмечены точки  $1, 2, 3, 4$ . В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.

**Задание 16.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ . На оси абсцисс отмечены точки  $-2, 1, 3, 4$ . В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.

**Задание 14.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ . На оси абсцисс отмечены точки  $-1, 2, 3, 4$ . В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



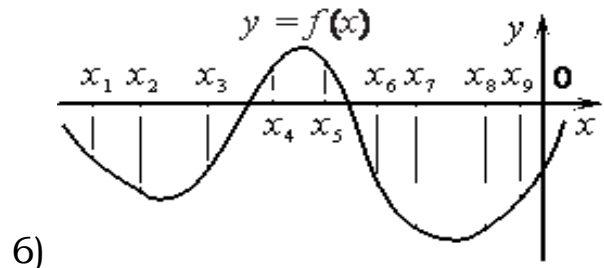
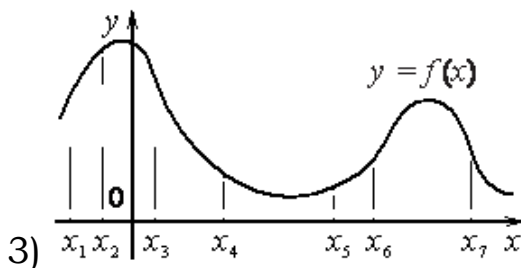
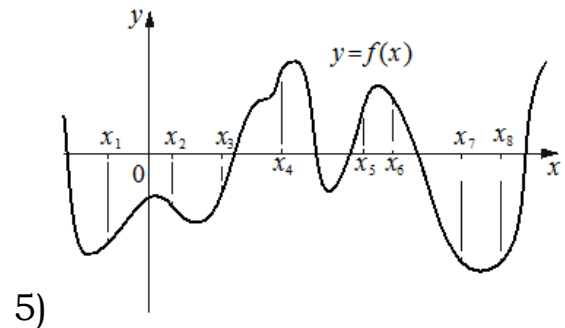
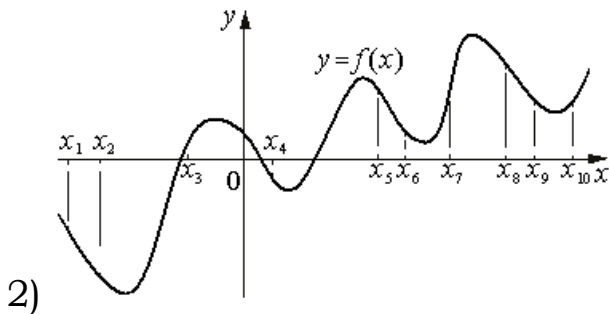
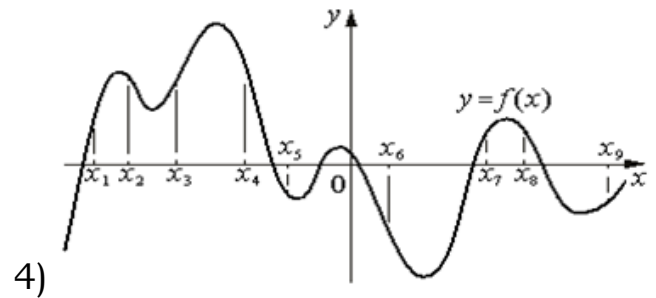
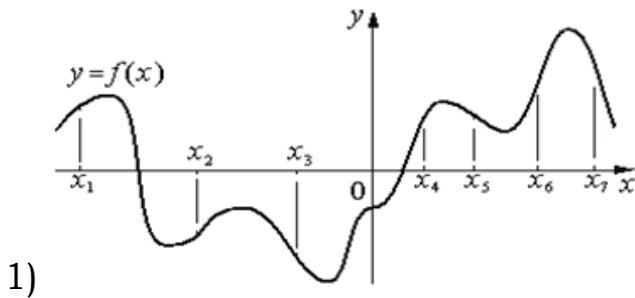
**Задание 17.**

а) Прямая  $y = 3x + 4$  является касательной к графику функции  $f(x) = 3x^2 - 3x + c$ . Найдите  $c$ .

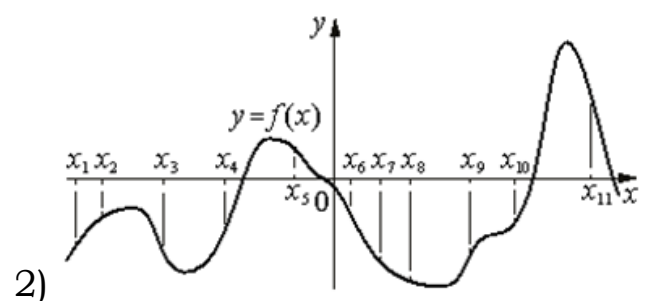
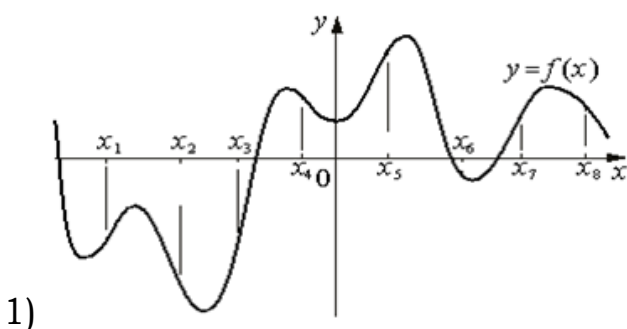
б) Прямая  $y = -3x - 5$  является касательной к графику функции  $f(x) = x^2 + 7x + c$ . Найдите  $c$ .

III) Исследование функций (производная)

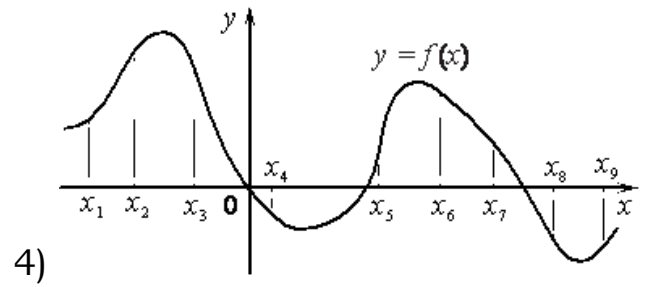
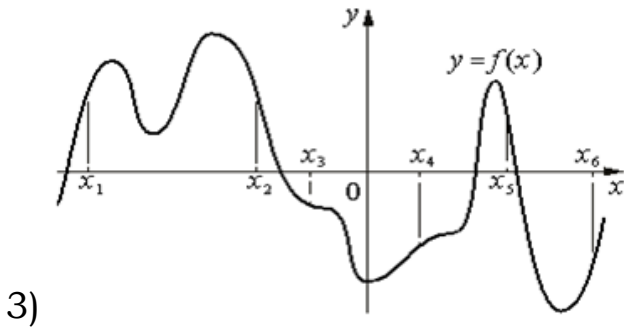
**Задание 18.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ . На оси абсцисс отмечены  $n$  точек:  $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ . В скольких из этих точек производная функции  $f(x)$  положительна?



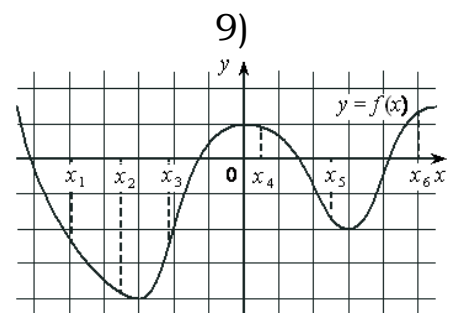
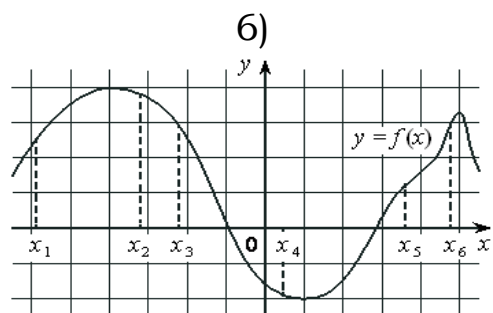
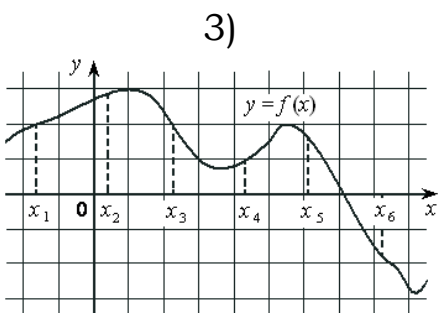
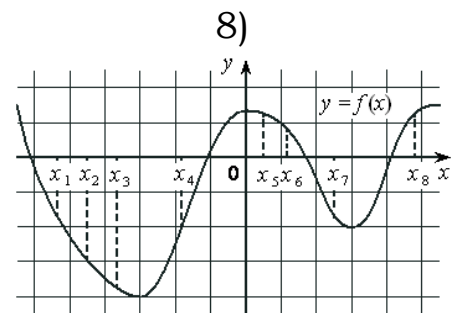
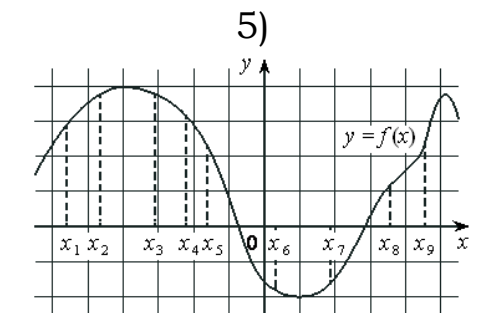
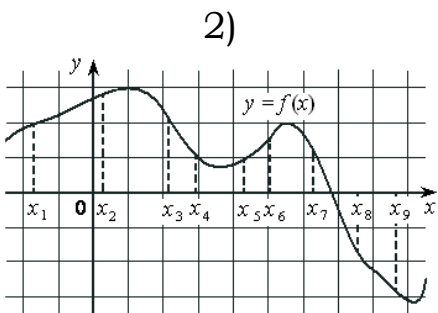
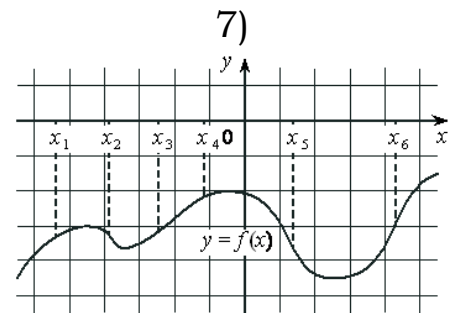
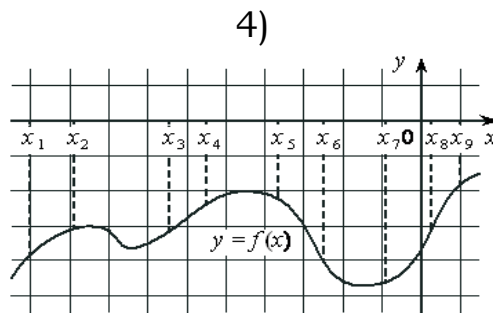
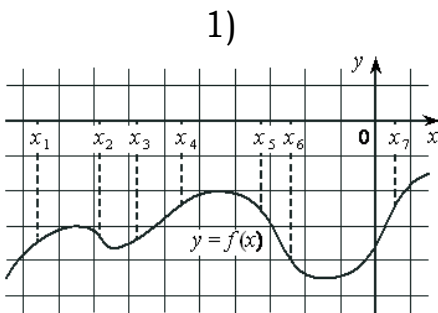
**Задание 19.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ . На оси абсцисс отмечены  $n$  точек:  $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ . В скольких из этих точек производная функции  $f(x)$  отрицательна?



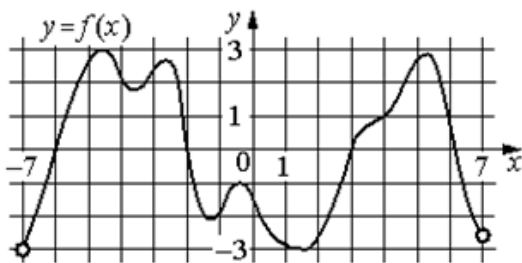
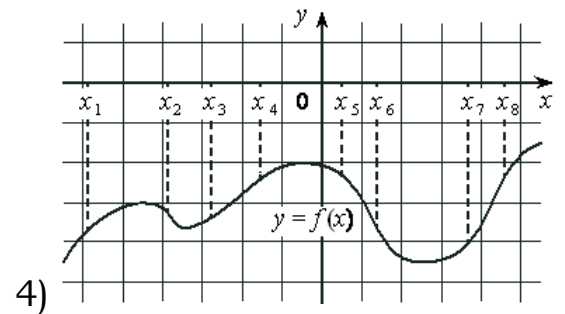
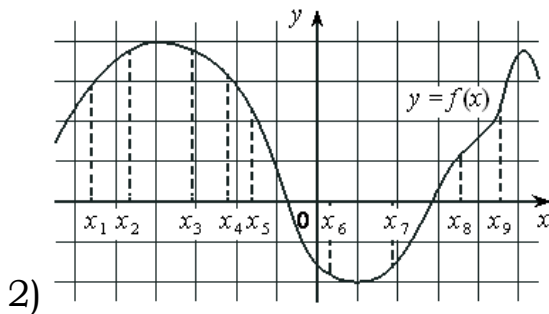
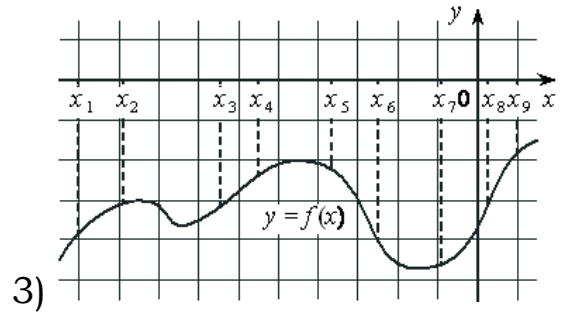
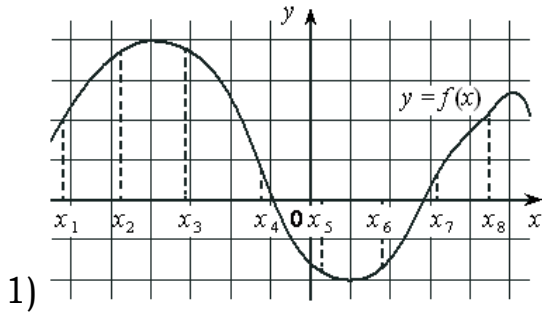
**Задание 19.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ . На оси абсцисс отмечены  $n$  точек:  $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ . В скольких из этих точек производная функции  $f(x)$  отрицательна?



**Задание 20.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ . На оси абсцисс отмечены  $n$  точек:  $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ . В скольких из этих точек производная функции  $f(x)$  положительна?

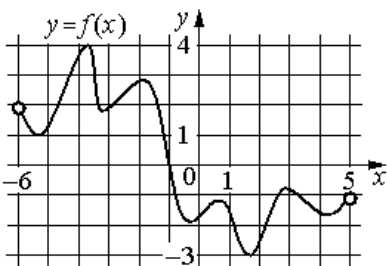


**Задание 21.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ . На оси абсцисс отмечены  $n$  точек:  $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ . В скольких из этих точек производная функции  $f(x)$  отрицательна?



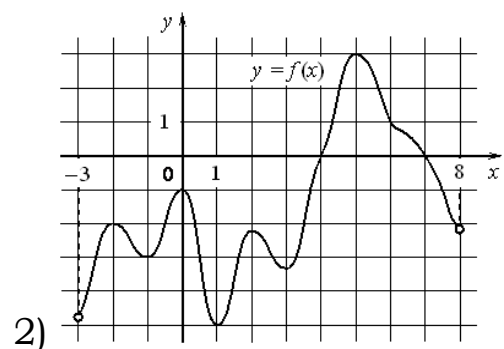
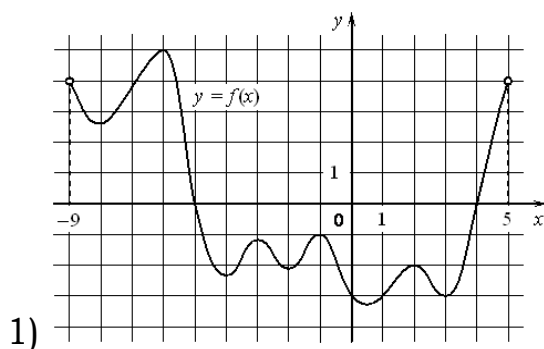
**Задание 22.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ , определённой на интервале  $(-7; 7)$ . Определите количество целых точек, в которых производная функции...

- 1) положительна;
- 2) отрицательна?

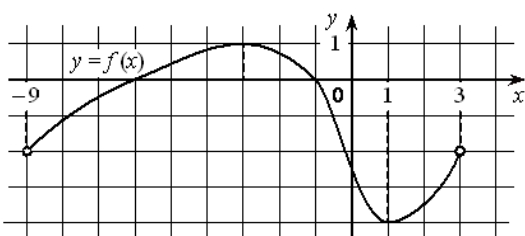
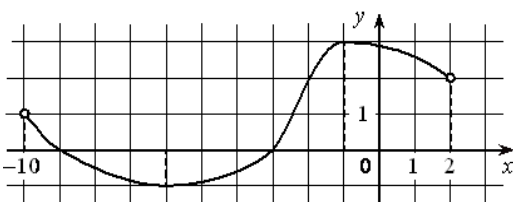
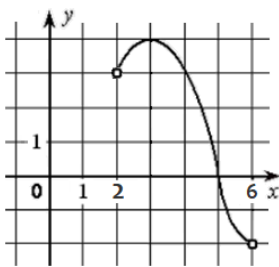
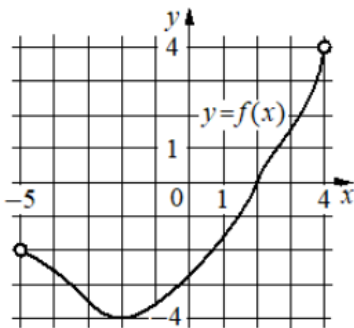
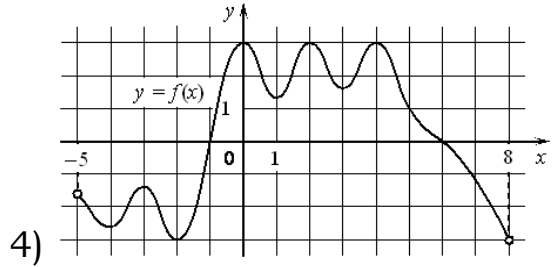
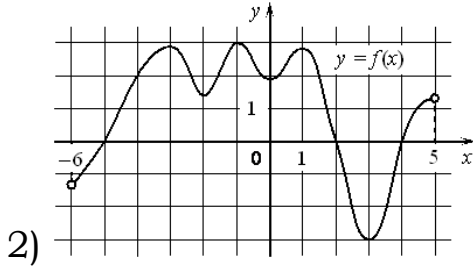
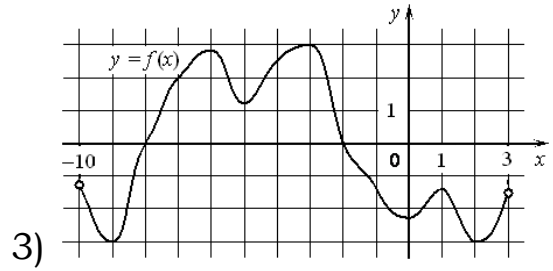
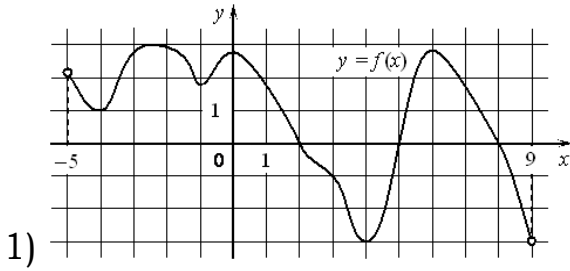


**Задание 23.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ , определённой на интервале  $(-6; 5)$ . Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.

**Задание 24.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ , определённой на интервале  $(a; b)$ . Найдите количество точек, в которых производная функции  $f(x)$  равна 0.



**Задание 25.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ , определённой на интервале  $(a; b)$ . Найдите количество точек, в которых производная функции  $f(x)$  равна 0.



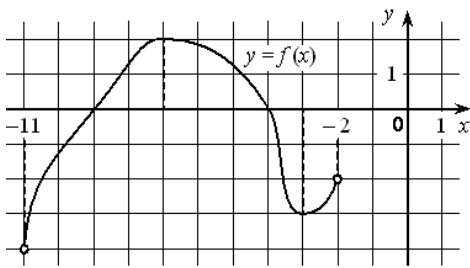
**Задание 26.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ , определённой на интервале  $(-5; 4)$ . Найдите корень уравнения  $f'(x) = 0$ .

**Задание 27.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ , определённой на интервале  $(2; 6)$ . Найдите корень уравнения  $f'(x) = 0$ .

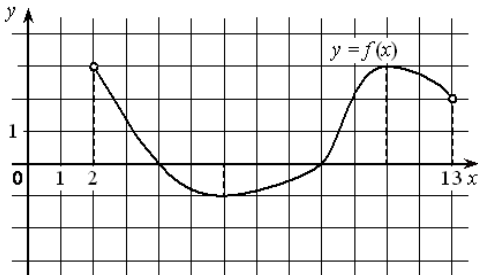
**Задание 28.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ , определённой на интервале  $(-10; 2)$ . Найдите точку из отрезка  $[-9; -2]$ , в которой производная функции  $f(x)$  равна 0.

**Задание 29.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ , определённой на интервале  $(-9; 3)$ . Найдите точку из отрезка  $[-8; 0]$ , в которой производная функции  $f(x)$  равна 0.

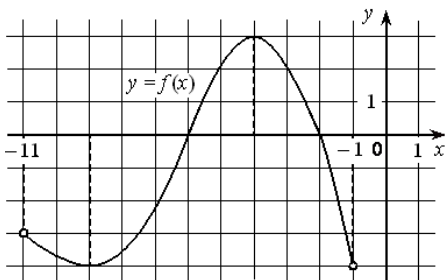




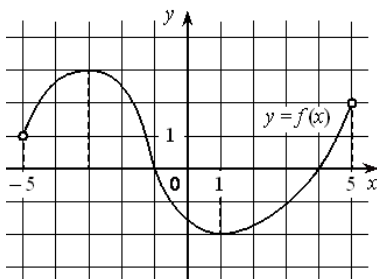
**Задание 30.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ , определённой на интервале  $(-11; -2)$ . Найдите точку из отрезка  $[-10; -4]$ , в которой производная функции  $f(x)$  равна 0.



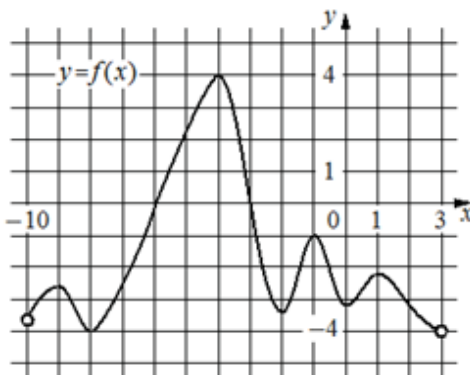
**Задание 31.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ , определённой на интервале  $(2; 13)$ . Найдите точку из отрезка  $[7; 12]$ , в которой производная функции  $f(x)$  равна 0.



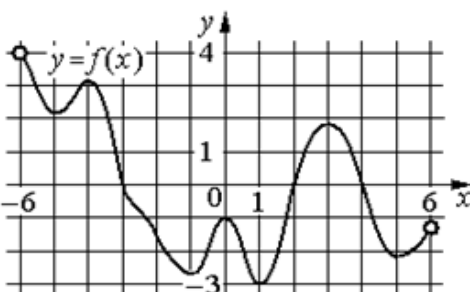
**Задание 32.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ , определённой на интервале  $(-11; -1)$ . Найдите точку из отрезка  $[-7; -2]$ , в которой производная функции  $f(x)$  равна 0.



**Задание 33.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ , определённой на интервале  $(-5; 5)$ . Найдите точку из отрезка  $[-2; 4]$ , в которой производная функции  $f(x)$  равна 0.

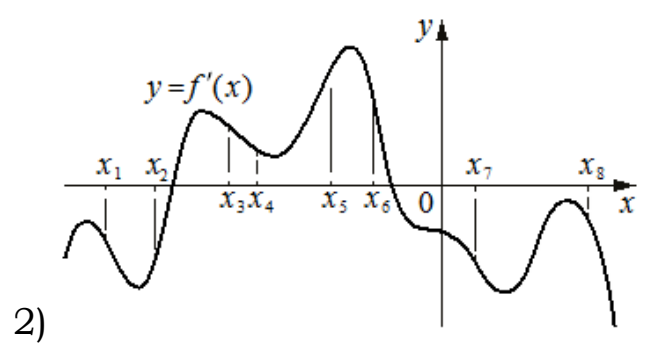
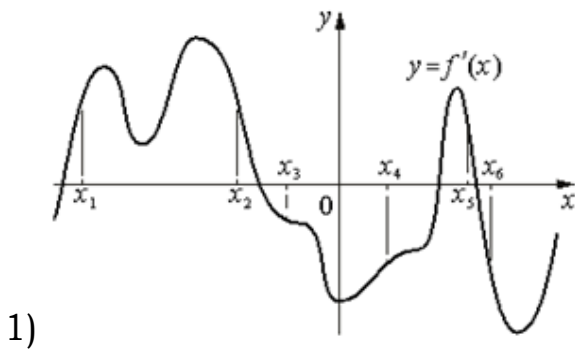


**Задание 34.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ , определённой на интервале  $(-10; 3)$ . Найдите количество решений уравнения  $f'(x) = 0$  на отрезке  $[-7; 2]$ .

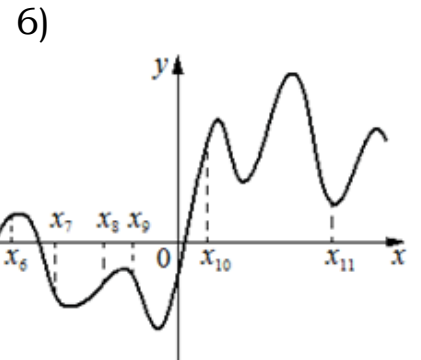
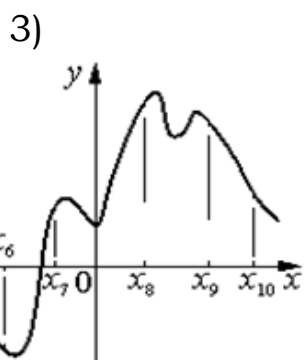
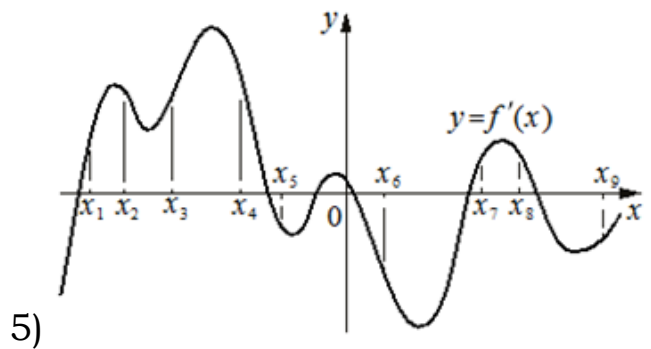
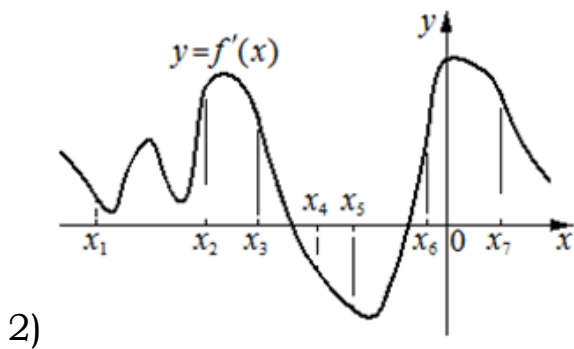
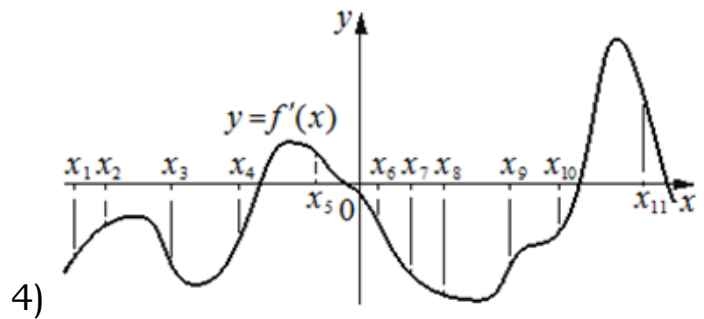
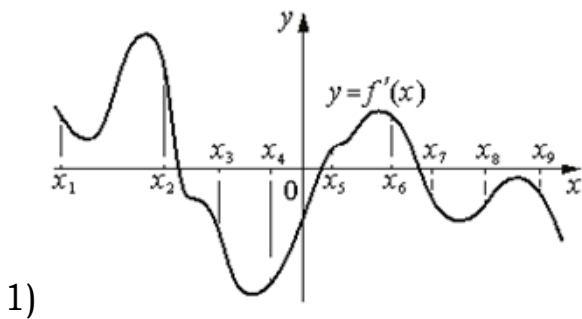


**Задание 35.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ , определённой на интервале  $(-6; 6)$ . Найдите количество решений уравнения  $f'(x) = 0$  на отрезке  $[-4,5; 2,5]$ .

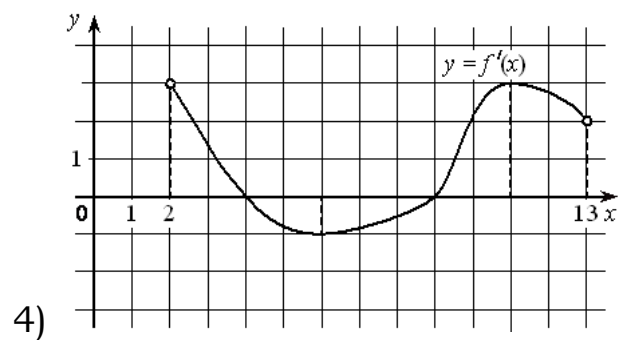
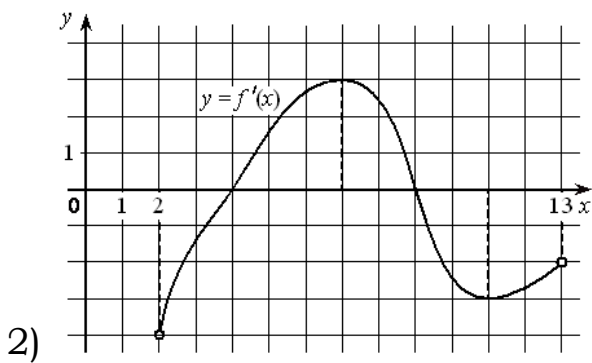
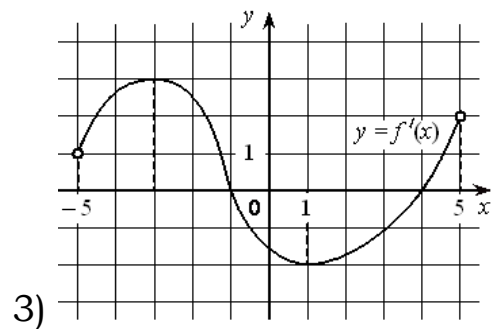
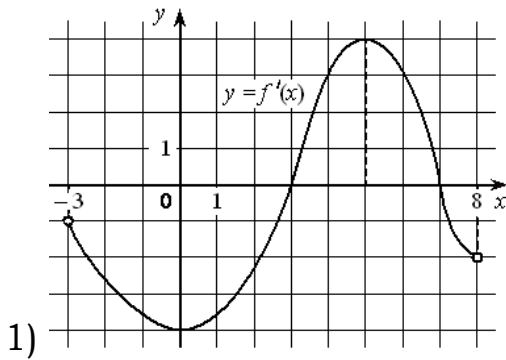
**Задание 36.** На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ . На оси абсцисс отмечены  $n$  точек:  $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ . Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции  $f(x)$ ?



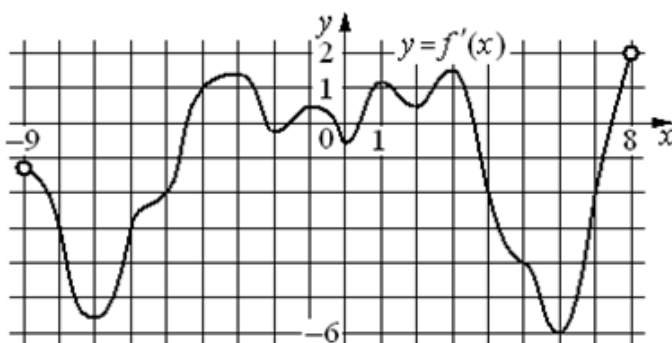
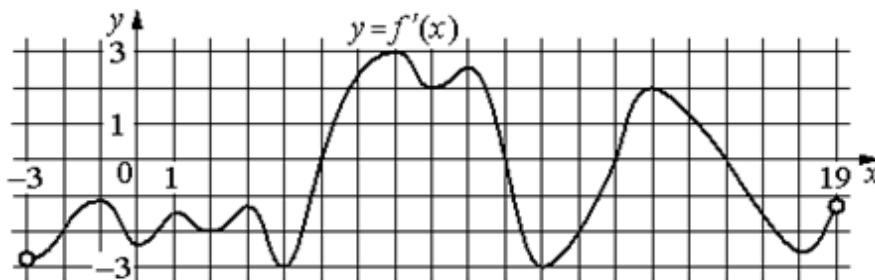
**Задание 37.** На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ . На оси абсцисс отмечены  $n$  точек:  $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ . Сколько из этих точек лежит на промежутках убывания функции  $f(x)$ ?



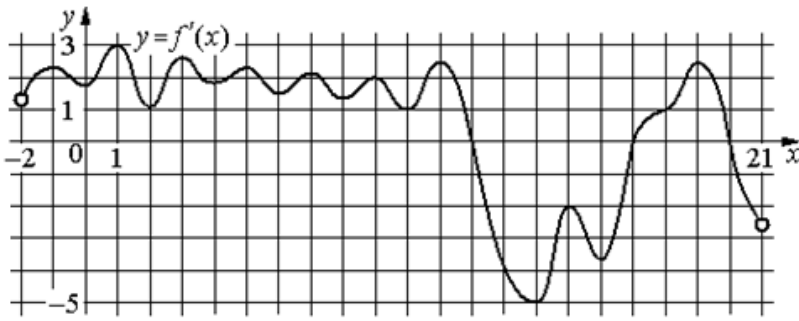
**Задание 38.** На рисунке изображён график функции  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(a; b)$ . Найдите точку максимума функции  $f(x)$ .



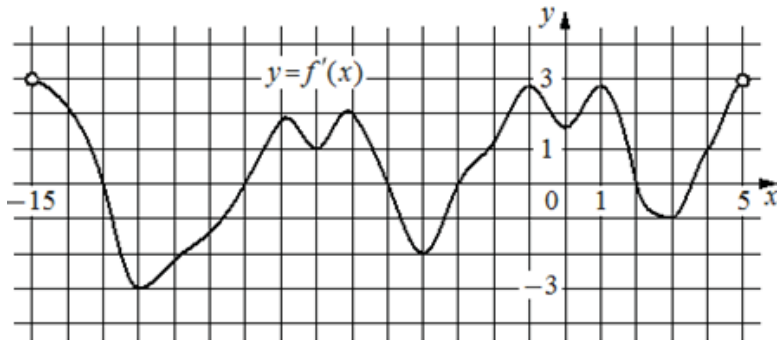
**Задание 39.** На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-3; 19)$ . Найдите количество точек максимума функции  $f(x)$ , принадлежащих отрезку  $[-2; 15]$ .



**Задание 40.** На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-9; 8)$ . Найдите количество точек максимума функции  $f(x)$ , принадлежащих отрезку  $[-7; 5]$ .

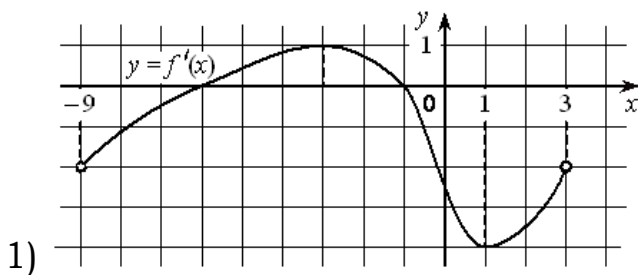


**Задание 41.** На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-2; 21)$ . Найдите количество точек максимума функции  $f(x)$ , принадлежащих отрезку  $[-1; 16]$ .

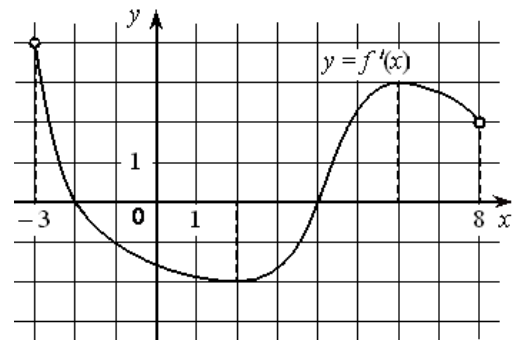


**Задание 42.** На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-15; 5)$ . Найдите количество точек максимума функции  $f(x)$ , принадлежащих отрезку  $[-11; 4]$ .

**Задание 43.** На рисунке изображён график функции  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(a; b)$ . Найдите точку минимума функции  $f(x)$ .

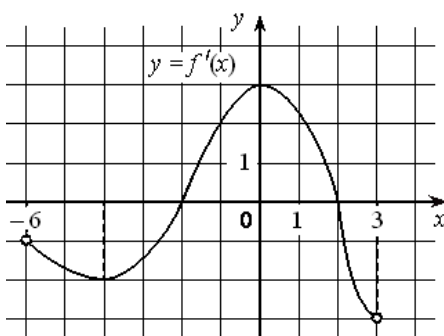


1)

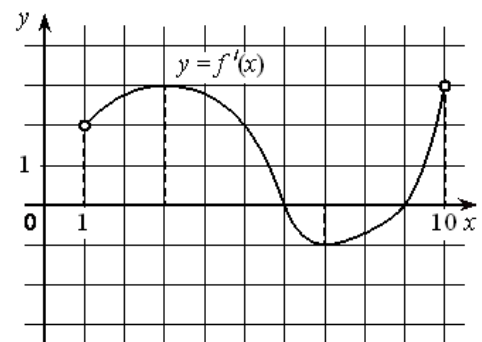


2)

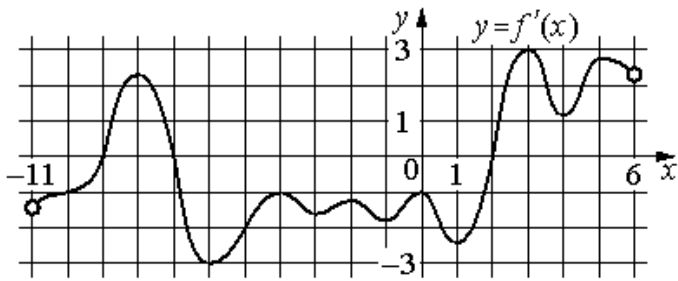
**Задание 44.** На рисунке изображён график функции  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(a; b)$ . Найдите точку минимума функции  $f(x)$ .



1)

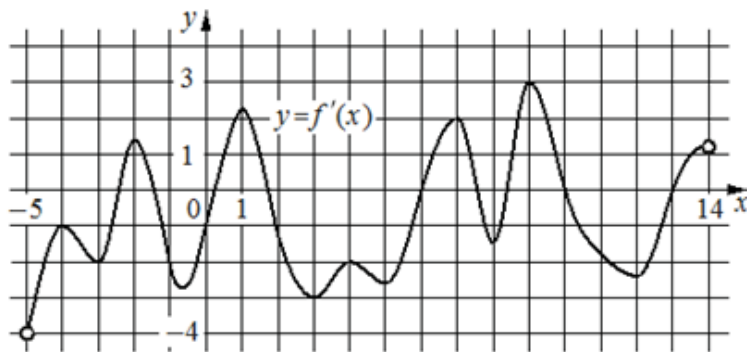
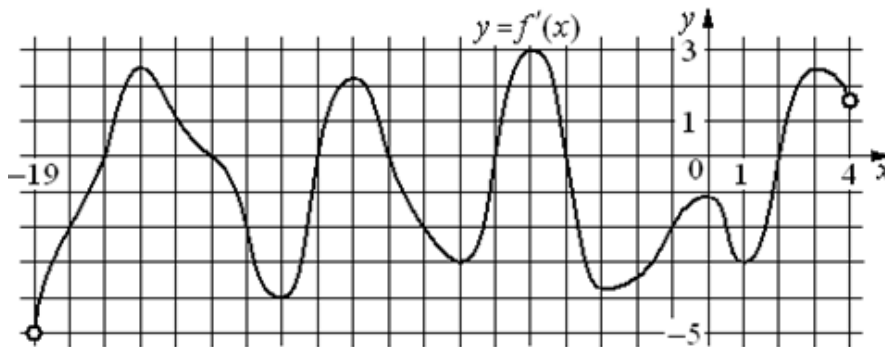


2)



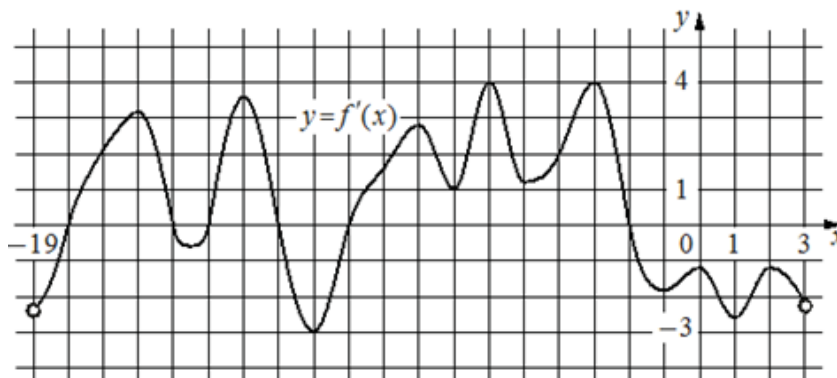
**Задание 45.** На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-11; 6)$ . Найдите количество точек минимума функции  $f(x)$  принадлежащих отрезку  $[-6; 4]$ .

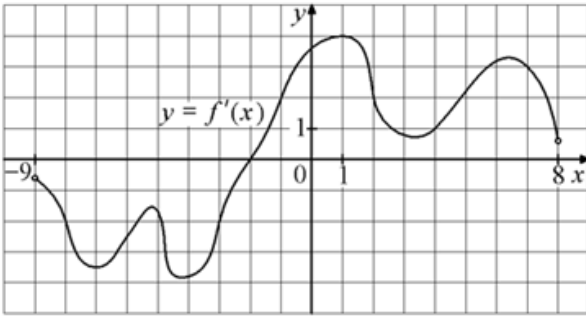
**Задание 46.** На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-19; 4)$ . Найдите количество точек минимума функции  $f(x)$ , принадлежащих отрезку  $[-18; 3]$ .



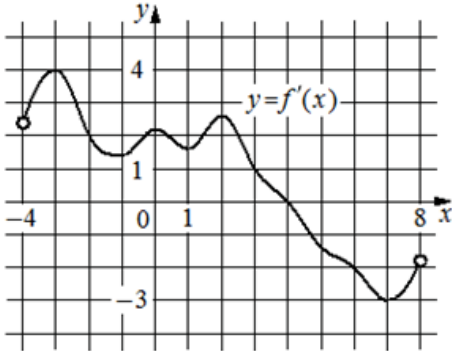
**Задание 47.** На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-5; 14)$ . Найдите количество точек минимума функции  $f(x)$ , принадлежащих отрезку  $[-4; 9]$ .

**Задание 48.** На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-19; 3)$ . Найдите количество точек экстремума функции  $f(x)$ , принадлежащих отрезку  $[-17; 2]$ .

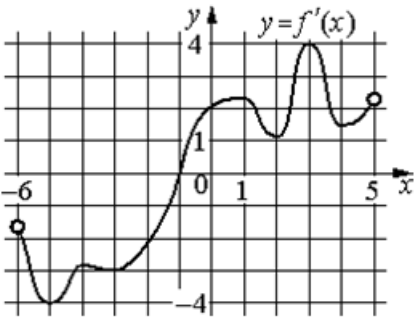




**Задание 49.** На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-9; 8)$ . Найдите точку экстремума функции  $f(x)$  на отрезке  $[-3; 3]$ .

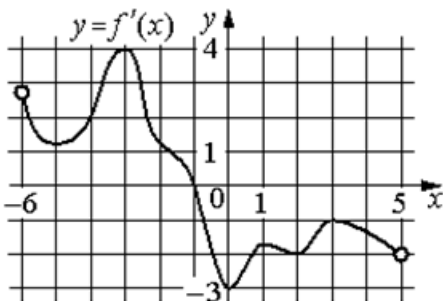
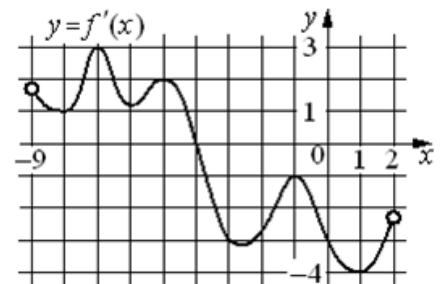


**Задание 50.** На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-4; 8)$ . Найдите точку экстремума функции  $f(x)$  на отрезке  $[1; 6]$ .



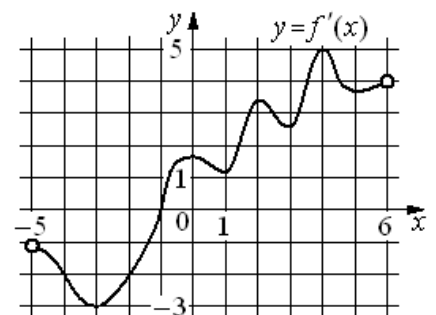
**Задание 51.** На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-6; 5)$ . В какой точке отрезка  $[-5; -1]$  функция  $f(x)$  принимает наибольшее значение?

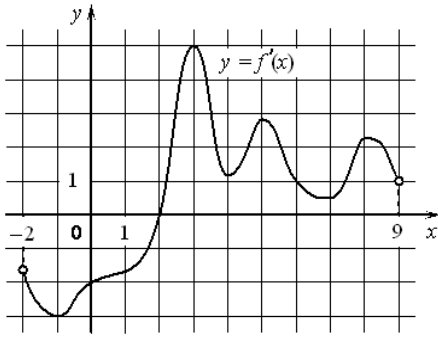
**Задание 52.** На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-9; 2)$ . В какой точке отрезка  $[-8; -4]$  функция  $f(x)$  принимает наибольшее значение?



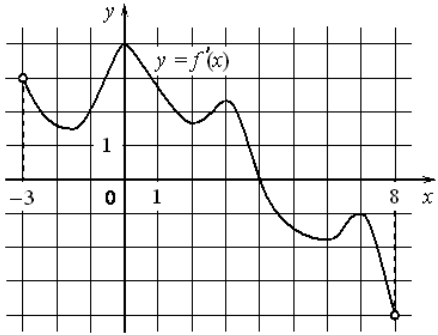
**Задание 53.** На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-6; 5)$ . В какой точке отрезка  $[-3; 4]$  функция  $f(x)$  принимает наибольшее значение?

**Задание 54.** На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-5; 6)$ . В какой точке отрезка  $[-1; 3]$  функция  $f(x)$  принимает наибольшее значение?

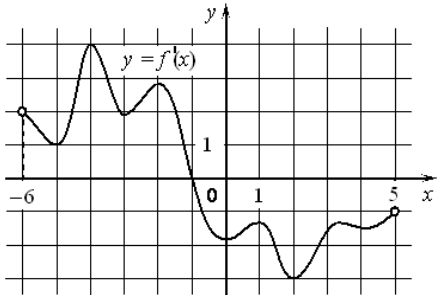




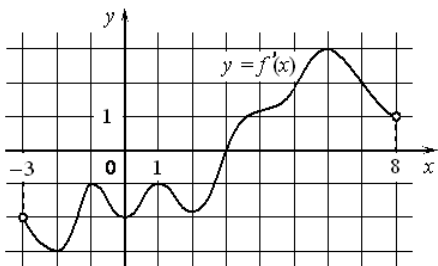
**Задание 55.** На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-2; 9)$ . В какой точке отрезка  $[2; 8]$  функция  $f(x)$  принимает наименьшее значение?



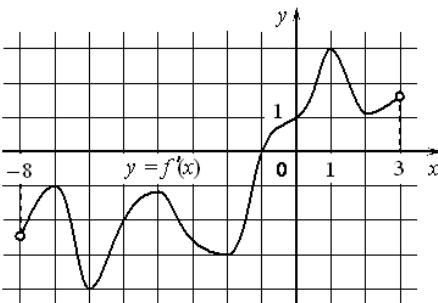
**Задание 56.** На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-3; 8)$ . В какой точке отрезка  $[-2; 3]$  функция  $f(x)$  принимает наименьшее значение?



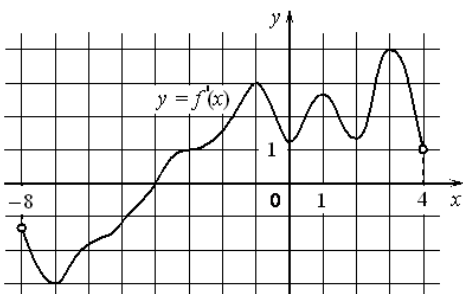
**Задание 57.** На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-6; 5)$ . В какой точке отрезка  $[-5; -1]$  функция  $f(x)$  принимает наименьшее значение?



**Задание 58.** На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-3; 8)$ . В какой точке отрезка  $[-2; 3]$  функция  $f(x)$  принимает наименьшее значение?

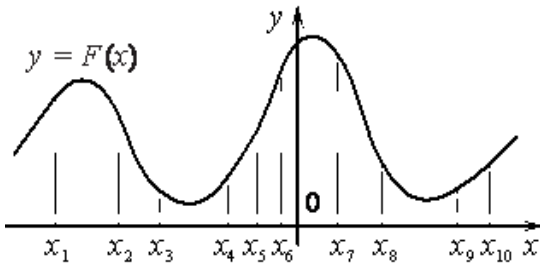


**Задание 59.** На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-8; 3)$ . В какой точке отрезка  $[-6; -1]$  функция  $f(x)$  принимает наименьшее значение?

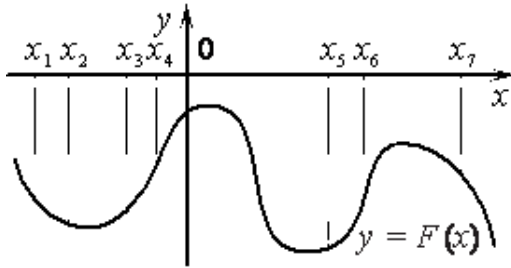


**Задание 60.** На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-8; 4)$ . В какой точке отрезка  $[-2; 3]$  функция  $f(x)$  принимает наименьшее значение?

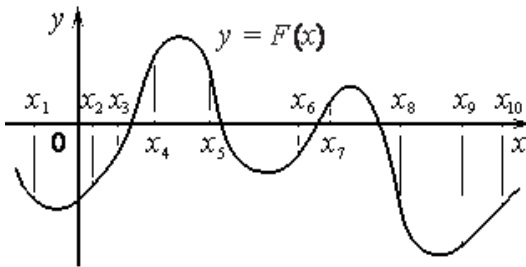
IV) Первообразная



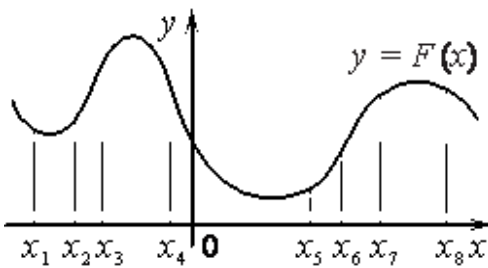
**Задание 61.** На рисунке изображён график  $y = F(x)$  одной из первообразных некоторой функции  $f(x)$  и отмечены  $n$  точек на оси абсцисс:  $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ . В скольких из этих точек функция  $f(x)$  положительна?



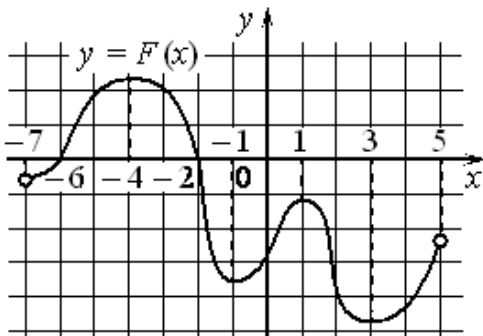
**Задание 62.** На рисунке изображён график  $y = F(x)$  одной из первообразных некоторой функции  $f(x)$  и отмечены  $n$  точек на оси абсцисс:  $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ . В скольких из этих точек функция  $f(x)$  положительна?



**Задание 63.** На рисунке изображён график  $y = F(x)$  одной из первообразных некоторой функции  $f(x)$  и отмечены  $n$  точек на оси абсцисс:  $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ . В скольких из этих точек функция  $f(x)$  отрицательна?

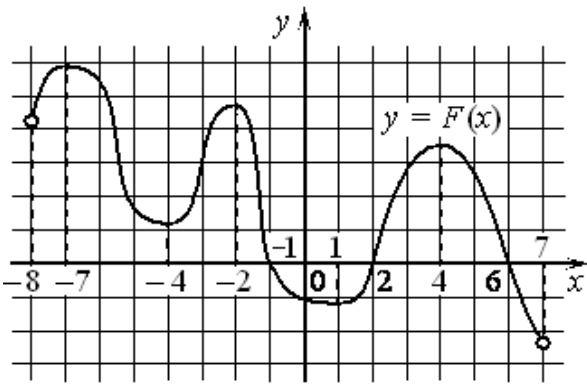


**Задание 64.** На рисунке изображён график  $y = F(x)$  одной из первообразных некоторой функции  $f(x)$  и отмечены  $n$  точек на оси абсцисс:  $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ . В скольких из этих точек функция  $f(x)$  отрицательна?

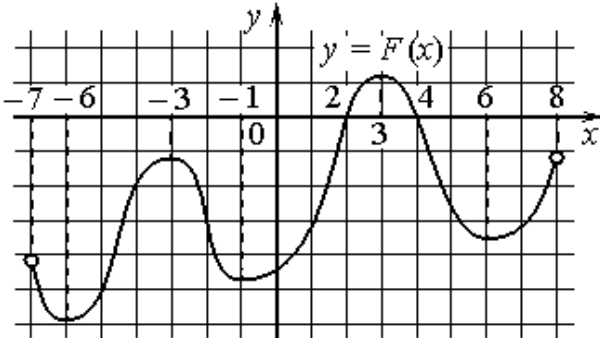


**Задание 65.** На рисунке изображён график  $y = F(x)$  одной из первообразных некоторой функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-7; 5)$ . Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения  $f(x) = 0$  на отрезке  $[-5; 2]$ .

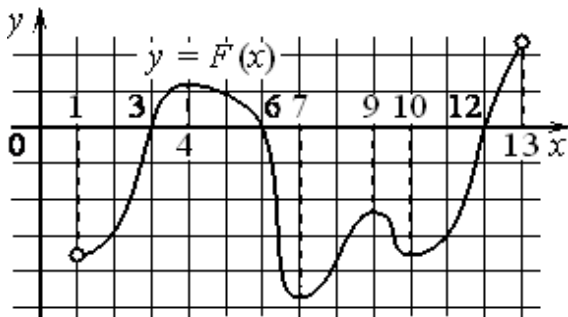




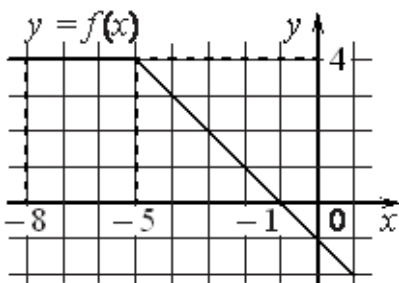
**Задание 66.** На рисунке изображён график  $y = F(x)$  одной из первообразных некоторой функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-8; 7)$ . Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения  $f(x) = 0$  на отрезке  $[-5; 5]$ .



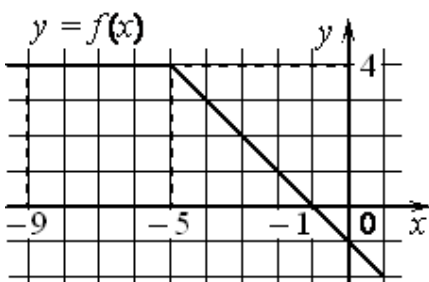
**Задание 67.** На рисунке изображён график  $y = F(x)$  одной из первообразных некоторой функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-7; 8)$ . Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения  $f(x) = 0$  на отрезке  $[0; 5]$ .



**Задание 68.** На рисунке изображён график  $y = F(x)$  одной из первообразных некоторой функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(1; 13)$ . Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения  $f(x) = 0$  на отрезке  $[2; 11]$ .



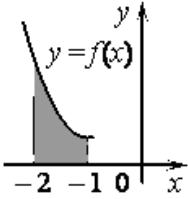
**Задание 69.** На рисунке изображён график некоторой функции  $y = f(x)$  (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите  $F(-1) - F(-8)$ , где  $F(x)$  – одна из первообразных функции  $f(x)$ .



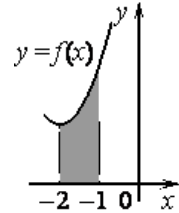
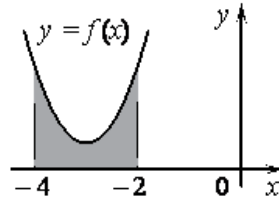
**Задание 70.** На рисунке изображён график некоторой функции  $y = f(x)$  (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите  $F(-1) - F(-9)$ , где  $F(x)$  – одна из первообразных функции  $f(x)$ .

**Задание 71.** На рисунке изображён график некоторой функции  $y = f(x)$ . Функция  $F(x)$  – одна из первообразных функции  $f(x)$ . Найдите площадь закрашенной фигуры:

1)  $F(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + 6$



3)  $F(x) = \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 + \frac{15}{2}x + \frac{7}{2}$



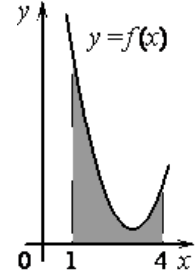
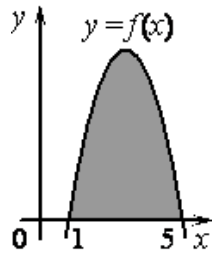
2)  $F(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 14x + 8$

**Задание 72.** На рисунке изображён график некоторой функции  $y = f(x)$ . Функция  $F(x)$  – одна из первообразных функции  $f(x)$ . Найдите площадь закрашенной фигуры:

1)  $F(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 15x - 5$

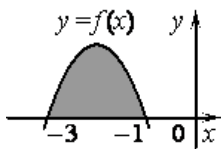


5)  $F(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 14x - 10$

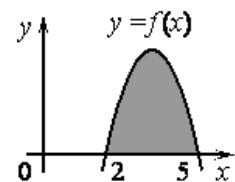
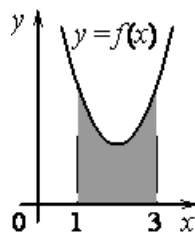


3)  $F(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{15}{2}x - 1$

2)  $F(x) = -\frac{1}{2}x^3 - 3x^2 - \frac{9}{2}x + 3$



6)  $F(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{21}{4}x^2 - 15x - 4$



4)  $F(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{15}{2}x - \frac{9}{2}$