

ЕГЭ-информатика

Задание №15

«Преобразование логических выражений»



Что нужно знать:

- условные обозначения логических операций

$\neg A, \bar{A}$ не A (отрицание, инверсия)

$A \wedge B, A \cdot B$ A и B (логическое умножение, конъюнкция)

$A \vee B, A + B$ A или B (логическое сложение, дизъюнкция)

$A \rightarrow B$ импликация (следование)

- таблицы истинности логических операций «И», «ИЛИ», «НЕ», «импликация» (см. презентацию «Логика»)
- операцию «импликация» можно выразить через «ИЛИ» и «НЕ»:

$$A \rightarrow B = \neg A \vee B \text{ или в других обозначениях } A \rightarrow B = \bar{A} + B$$

- если в выражении нет скобок, сначала выполняются все операции «НЕ», затем – «И», затем – «ИЛИ», и самая последняя – «импликация»
- иногда полезны формулы де Моргана¹:

$$\neg (A \wedge B) = \neg A \vee \neg B \qquad \overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$$

$$\neg (A \vee B) = \neg A \wedge \neg B \qquad \overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

- для упрощения выражений можно использовать формулы

$$A + A \cdot B = A \text{ (т.к. } A + A \cdot B = A \cdot 1 + A \cdot B = A \cdot (1 + B) = A \cdot 1 = A \text{)}$$

$$A + \bar{A} \cdot B = A + B \text{ (т.к. } A + \bar{A} \cdot B = (A + \bar{A}) \cdot (A + B) = 1 \cdot (A + B) = A + B \text{)}$$

- некоторые свойства импликации

$$A \rightarrow (B \cdot C) = (A \rightarrow B) \cdot (A \rightarrow C)$$

$$A \rightarrow (B + C) = (A \rightarrow B) + (A \rightarrow C)$$

Побитовая конъюнкция

Обозначим через $m \& n$ поразрядную конъюнкцию неотрицательных целых чисел m и n .

Так, например, $14 \& 5 = 1110_2 \& 0101_2 = 0100_2 = 4$.

Для какого наименьшего неотрицательного целого числа A формула

$$x \& 29 \neq 0 \rightarrow (x \& 17 = 0 \rightarrow x \& A \neq 0)$$

тождественно истинна (т. е. принимает значение 1 при любом неотрицательном целом значении переменной x)?

```
for a in range(0, 1000):  
    k = 0  
    for x in range(0, 1000):  
        if (x & 29 != 0) <= ((x & 17 == 0) <= (x & a != 0)):  
            k += 1  
    if k == 1000:  
        print(a)  
        break
```

Ответ: 12.

Числовые отрезки

На числовой прямой даны два отрезка: $P = [5, 30]$ и $Q = [14, 23]$.
Укажите наибольшую возможную длину промежутка A , для которого
формула

$$((x \in P) \equiv (x \in Q)) \rightarrow \neg(x \in A)$$

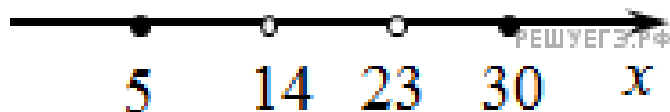
тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом
значении переменной x .

Решение :

$$(x \in P) \equiv P; (x \in Q) \equiv Q; (x \in A) \equiv A.$$

$$\neg(P \equiv Q) \vee \neg A \Leftrightarrow \neg(P \equiv Q) \vee \neg A = 1.$$

Выражение $\neg(P \equiv Q)$ истинно только тогда, когда $x \in [5; 14)$ и $x \in (23; 30]$



Следовательно, наибольшая возможная длина промежутка равна $14 - 5 = 9$.

Ответ: 9.

Координатная плоскость

Для какого наибольшего целого числа A формула

$$((x \leq 9) \rightarrow (x \cdot x \leq A)) \wedge ((y \cdot y \leq A) \rightarrow (y \leq 9))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любых целых неотрицательных x и y ?

```
for a in range(300, 1, -1):
    k = 0
    for x in range(0, 300):
        for y in range(0, 300):
            if ((x <= 9) <= (x * x <= a)) and ((y*y <= a) <= (y <= 9)):
                k += 1
    if k == 90_000:
        print(a)
        break
```

Ответ: 99.

Разное

Обозначим через $\text{ДЕЛ}(n, m)$ утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m ».

Для какого наибольшего натурального числа A формула

$$\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 6) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 4))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом

Решение :

$$A = \text{ДЕЛ}(x, A), P = \text{ДЕЛ}(x, 6) \text{ и } Q = \text{ДЕЛ}(x, 4)$$

A — множество натуральных чисел, для которых выполняется условие A

P — множество натуральных чисел, для которых выполняется условие P

Q — множество натуральных чисел, для которых выполняется условие Q

истинным для всех X должно быть выражение $\bar{A} \rightarrow (P \rightarrow \bar{Q})$

$$A \rightarrow B = \bar{A} + B$$

$$\bar{A} \rightarrow (P \rightarrow \bar{Q}) = A + (P \rightarrow \bar{Q}) = A + \bar{P} + \bar{Q}$$

Ответ: 12