

ЕГЭ-информатика
Задание №19-21
«Выигрышная стратегия»



Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит **куча камней**. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **добавить в кучу один камень или увеличить количество камней в куче в два раза**. Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 29. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший кучу, в которой будет **29** или больше камней.

В начальный момент в куче было S камней, $1 \leq S \leq 28$.

Задание 19.

Укажите такое значение S , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом.

Задание 20.

Найдите два таких значения S , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

Задание 21

Найдите значение S , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Решение (построение таблицы).

- 1) задачи с одной кучей просто решаются с помощью таблицы (массива); будем записывать в ячейках таблицы числовую оценку позиции: положительное число N означает выигрыш за N ходов, отрицательное число $(-N)$ – проигрыш за N ходов
- 2) очевидно, что при всех $S \geq 15$ Петя выигрывает своим первым ходом, увеличив количество камней в куче вдвое; это позиции с оценкой 1 (выигрыш в один ход):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
														1	1	1

- 3) все возможные ходы из позиции 14 (это 15 и 28) ведут в позиции с оценкой 1, то есть 14 – проигрышная позиция с оценкой -1: проигрыш за один ход (Петя, начинающий игру, может ходить любым способом, но Ваня своим первым ходом сразу сможет выиграть):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
													-1	1	1	1

- 4) гарантированный выигрыш за 2 хода возможен для тех позиций, из которых есть ход в позицию с оценкой -1, то есть, из позиций 13 и 7; оценка этих позиций – 2:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
						2						2	-1	1	1	1

- 5) дальше определяем все позиции, откуда все ходы ведут в позиции с оценкой 1 или 2 (все они уже заполнены в таблице); определяем, что это только позиция 12 (возможные ходы – 13 с оценкой 2 и 24 с оценкой 1):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
						2					-2	2	-1	1	1	1

оценка позиции 12 равна (-2)

Ответ:

Решение Задания 19.

Ответ: 14 (позиция с оценкой -1).

Решение Задания 20.

Ответ: 7 и 13 (позиции с оценкой 2).;

Решение Задания 21.

Ответ: 12 (позиция с оценкой -2).

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза**. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее **77**. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 77 или больше камней. В начальный момент в первой куче было **семь** камней, во второй куче — S камней; $1 \leq S \leq 69$.

Задание 19.

Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети. Укажите минимальное значение S , когда такая ситуация возможна.

Задание 20.

Найдите два таких значения S , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

Задание 21

Найдите минимальное значение S , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Решение Задания 19.

- 1) при минимальном подходящем значении S общее количество камней в двух кучах увеличивается **максимально быстро** до значения 77 или большего;
- 2) поскольку удвоение увеличивает количества камней в куче быстрее, чем добавление одного камня, можно сделать вывод, что для минимального подходящего значения S игроки своими ходами дважды удвоили большую из двух куч;
- 3) предположим, что большая куча имеет 7 камней, и $S = 7$; тогда наибольшее число камней, которое можно получить после одного хода каждого игрока – $7 + 7 \cdot 2 \cdot 2 = 35$; так как $35 < 77$, игра не окончена и этот вариант не подходит; делаем вывод, что **$S > 7$**
- 4) таким образом, дважды была удвоена вторая куча; условие окончания игры $7 + S \cdot 2 \cdot 2 \geq 77$,
- 5) откуда получаем $S \geq 17,5$; это значит, что $S_{\min} = 18$

Ответ: 18.

Решение Задания 20.

- 1) Петя своим ходом должен перевести игру в такую позицию, что Ваня не может выиграть своим первым ходом, но добавление одного камня в любую кучу позволяет выиграть Пете вторым ходом
- 2) рассмотрим такие (проигрышные) позиции; при удвоении второй (большей) кучи в сумме должно получаться **76 камней** (недостаточно для выигрыша):
- 3) (8, 34) (10, 33) (12, 32) (14, 31) (16, 30) ...
- 4) теперь подумаем, какие из них можно получить из начальной позиции (7, S) за один ход; видно, что количество камней в первой куче изменяется, то есть Петя на первом ходу работает с первой кучей; он может получить там $7 + 1 = 8$ камней (и у нас есть критическая позиция **(8, 34)!**) или $7 * 2 = 14$ камней (для этого случая тоже есть критическая позиция **(14, 31)**)
- 5) поэтому условию задания удовлетворяют значения $S = 31$ и 34 , их нужно записать в порядке возрастания

Ответ: 31 34.

Решение Задания 21 .

- 1) для полного решения задачи построим таблицу выигрышных и проигрышных позиций; выигрышные позиции будем обозначать положительными числами, например, 2 – выигрыш в два хода; проигрышные позиции обозначаем отрицательными числами, например, «-2» – проигрыш в два хода (это значит, что при самой лучшей игре первого игрока второй выиграет по крайней мере своим вторым ходом)
- 2) таблица будет прямоугольная, на вертикальной оси откладываем количество камней в первой куче, на горизонтальной – количество камней во второй куче:

	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
7								1	1	1
8							-1	1	1	1
9							1	1	1	1
10						-1	1	1	1	1
11						1	1	1	1	1
12					-1	1	1	1	1	1
13					1	1	1	1	1	1
14				-1	1	1	1	1	1	1
15				1	1	1	1	1	1	1
16			-1	1	1	1	1	1	1	1
17			1	1	1	1	1	1	1	1
18		-1	1	1	1	1	1	1	1	1

пока в таблице расставлены единицы в позициях, которые ведут к выигрышу Пети на первом ходу и «-1» в позициях, которые ведут к выигрышу Вани на своем первом ходу (после любого первого хода Пети)

3) отметим числом 2 ячейки, откуда есть ход в серые клетки с ходом «-1»:

	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
7				2			2	1	1	1
8			2			2	-1	1	1	1
9						2	1	1	1	1
10					2	-1	1	1	1	1
11					2	1	1	1	1	1
12				2	-1	1	1	1	1	1
13				2	1	1	1	1	1	1
14			2	-1	1	1	1	1	1	1
15			2	1	1	1	1	1	1	1
16		2	-1	1	1	1	1	1	1	1
17		2	1	1	1	1	1	1	1	1
18	2	-1	1	1	1	1	1	1	1	1

в верхней строке таблицы выделены жёлтым позиции (7, 31) и (7, 34), найденные при решении предыдущего задания

- 4) докажем, что в верхней строке больше нет позиций с кодом 2; по определению из позиции с кодом 2 есть ход в позицию с кодом «-1»; во всех позициях с кодом «-1», не попавших в рассмотренную часть таблицы, в первой куче больше 14 камней, то есть, стартовав с первой кучей из 7 камней мы не можем получить такие позиции за один ход
- 5) нам нужно найти в верхней строке позиции, из которых все ходы ведут в выигрышные позиции с кодами 1 (выигрыш за 1 ход) или 2 (выигрыш за 2 хода)

- 6) сразу видны две таких позиции (выделены на следующем рисунке зелёным цветом):
 (7, 30) – возможные ходы в (7, 31), (8, 30) и (14, 30) с кодом 2 и (7, 60) с кодом 1
 (7, 33) – возможные ходы в позиции (7, 34) и (8, 33) с кодом 2, а также (14, 33) и (7, 66) с кодом 1:

	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
7			-2	2		-2	2	1	1	1
8			2			2	-1	1	1	1
9						2	1	1	1	1
10					2	-1	1	1	1	1
11					2	1	1	1	1	1
12				2	-1	1	1	1	1	1
13				2	1	1	1	1	1	1
14			2	-1	1	1	1	1	1	1
15			2	1	1	1	1	1	1	1
16		2	-1	1	1	1	1	1	1	1
17		2	1	1	1	1	1	1	1	1
18	2	-1	1	1	1	1	1	1	1	1

- 9) рассмотрим ход (14, 17); возможные ходы из него

(15, 17) (28, 17) (14, 18) (14, 34)

среди них нет ни одного хода в позицию с кодом «-1», то есть, ход Пети (14, 17) не даст Ване выиграть за 2 хода; поэтому эта позиция не подходит

- 10) Ответ: 30.

здесь жёлтым фоном выделены ходы с кодом 2 – выигрышные позиции за 2 хода (из позиции (8, 17) есть ход в (8, 34) с кодом «-1»)