

08. Производная и первообразная

Блок 1. ФИПИ

I) Физический смысл производной

Задание 1. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{2}t^2 + 4t + 27$, где x – расстояние от точки отсчёта в метрах, t – время в секундах, измеренное с момента начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 2$ с.

Задание 2. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{3}t^2 - 2t + 44$, где x – расстояние от точки отсчёта в метрах, t – время в секундах, измеренное с момента начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 6$ с.

Задание 3. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 5t^2 + 45t + 130$, где x – расстояние от точки отсчёта в метрах, t – время в секундах, измеренное с момента начала движения. В какой момент времени её скорость была равна 20 м/с?

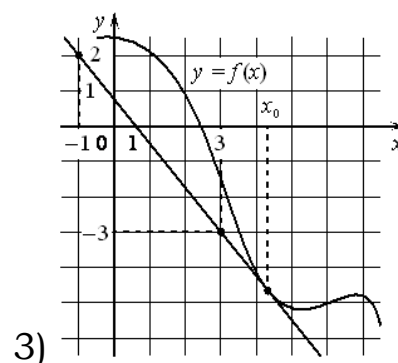
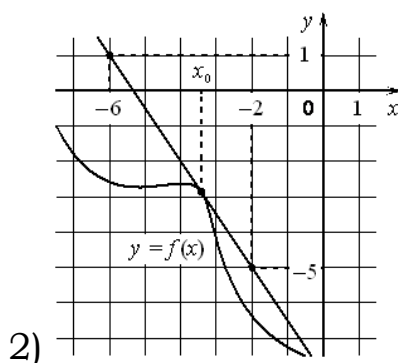
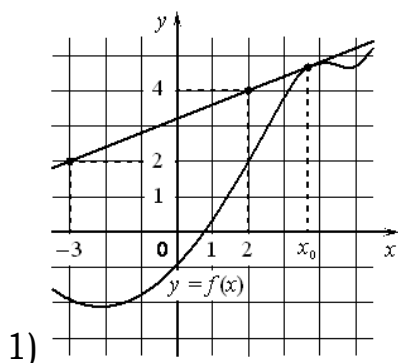
Задание 4. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{6}t^3 + t^2 - 8t + 180$, где x – расстояние от точки отсчёта в метрах, t – время в секундах, измеренное с момента начала движения. В какой момент времени её скорость была равна 40 м/с?

Задание 5. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t - 190$, где x – расстояние от точки отсчёта в метрах, t – время в секундах, измеренное с момента начала движения. В какой момент времени её скорость была равна 48 м/с?

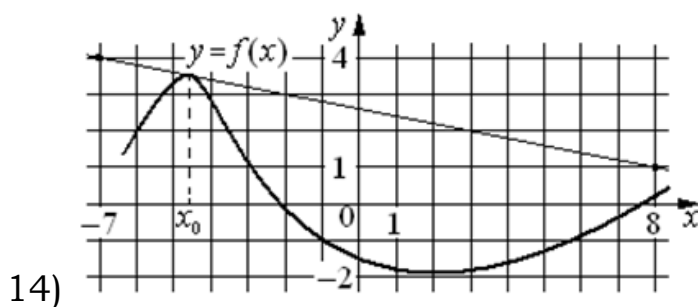
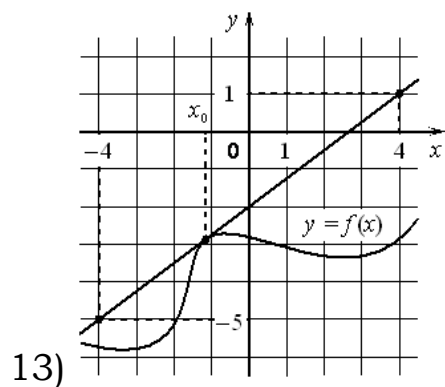
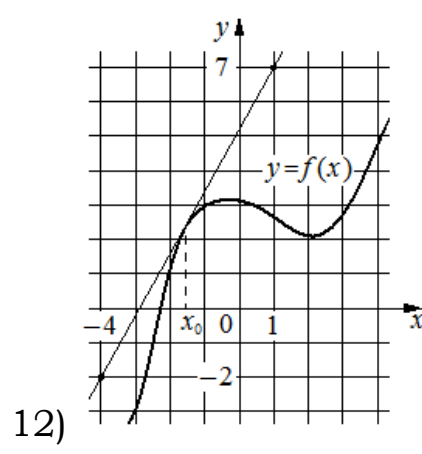
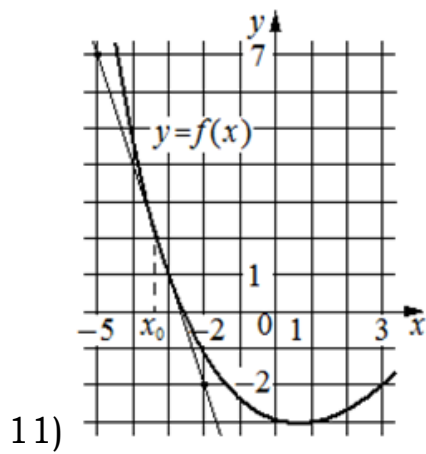
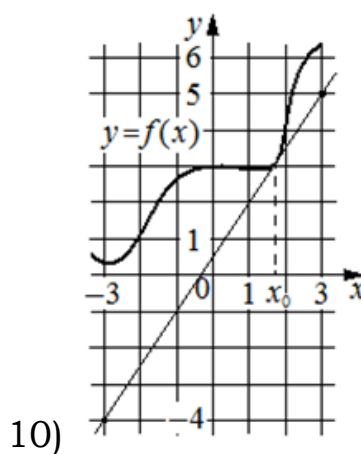
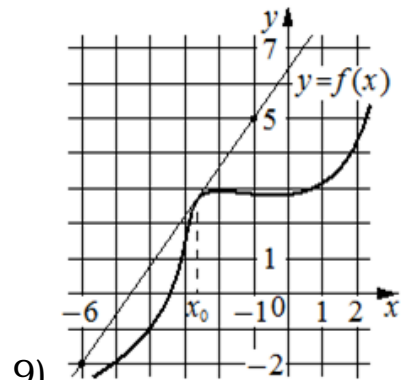
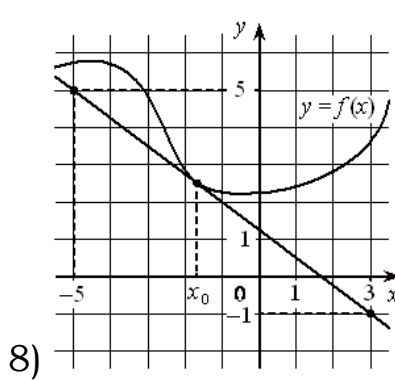
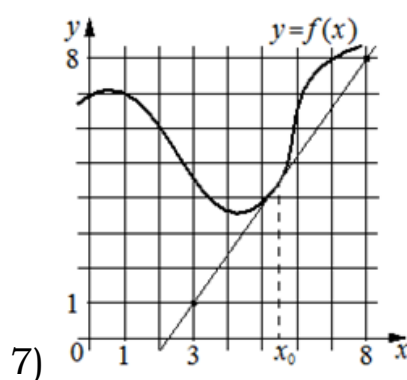
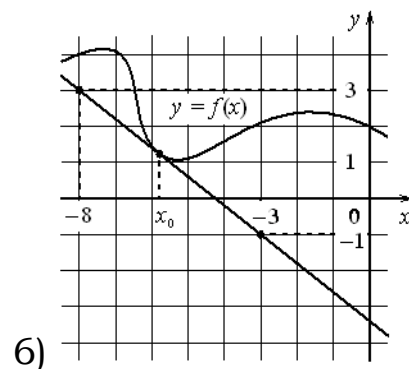
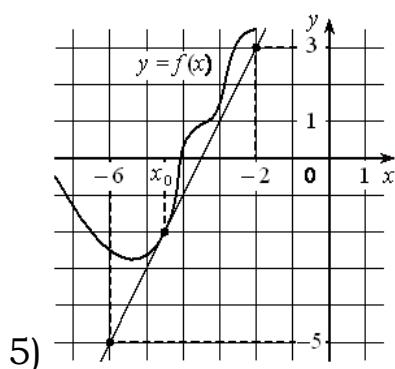
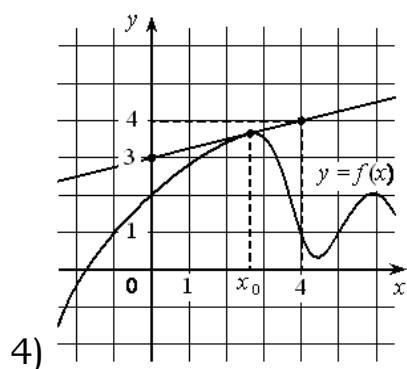
Задание 6. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{6}t^3 - 2t^2 + 6t + 250$, где x – расстояние от точки отсчёта в метрах, t – время в секундах, измеренное с момента начала движения. В какой момент времени её скорость была равна 96 м/с?

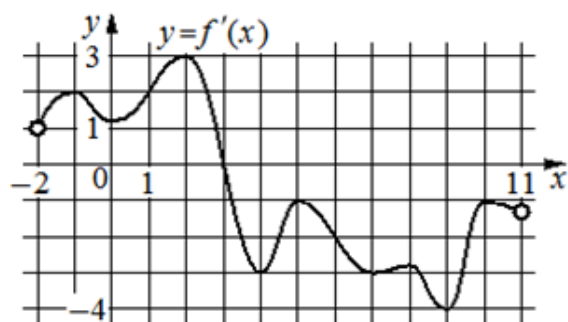
II) Геометрический смысл производной, касательная

Задание 7. (ОБЗ) На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

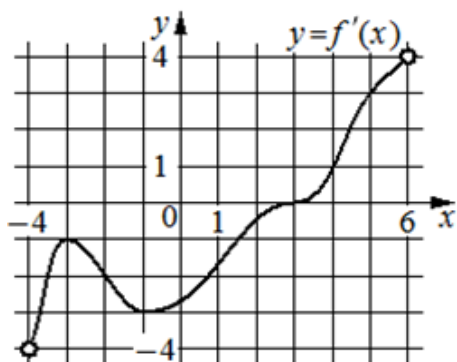


Задание 7. (ОБЗ) На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

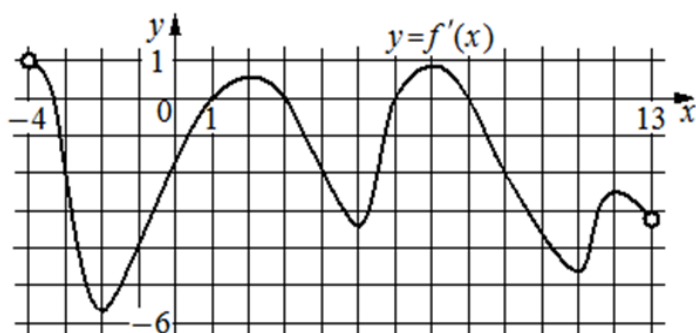




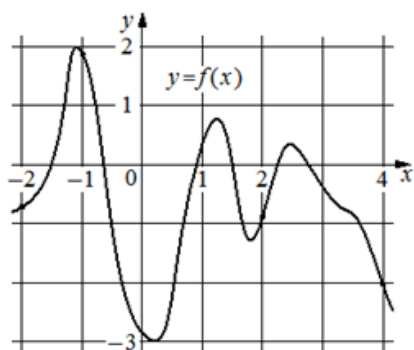
Задание 8. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 11)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.



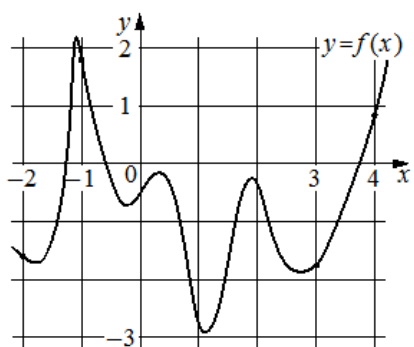
Задание 9. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 6)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 3x$ или совпадает с ней.



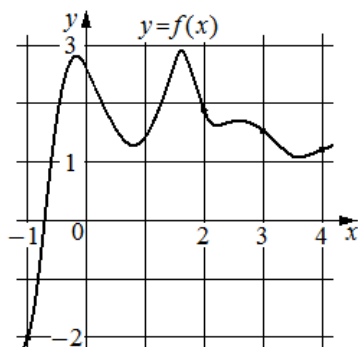
Задание 10. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 13)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$...
 а) параллельна прямой $y = 14$;
 б) параллельна прямой $y = -2x - 10$ или совпадает с ней.



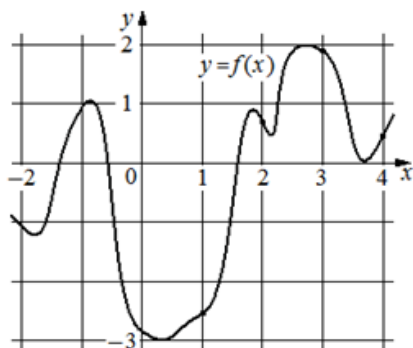
Задание 11. (ОБЗ) На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки $-2, -1, 2, 4$. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



Задание 12. (ОБЗ) На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки $-2, -1, 3, 4$. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



Задание 13. (ОБЗ) На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки $-1, 2, 3, 4$. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



Задание 14. (ОБЗ) На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки $1, 2, 3, 4$. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.

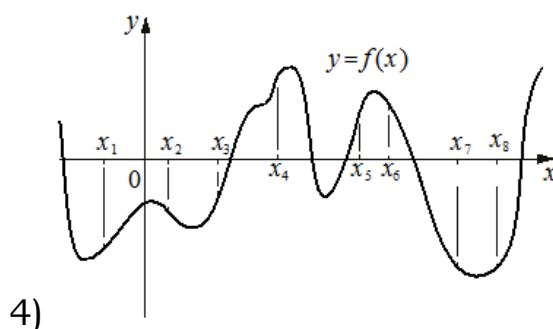
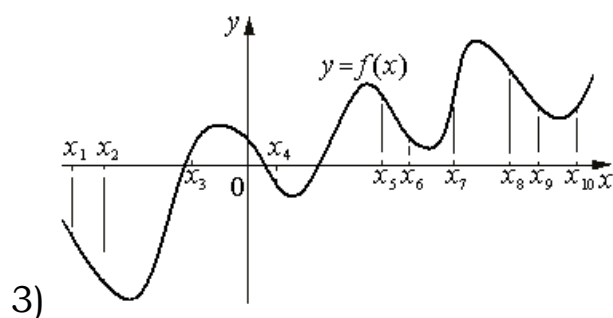
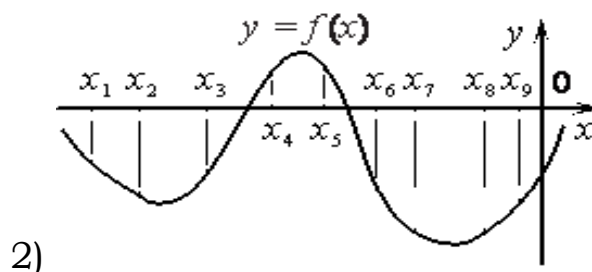
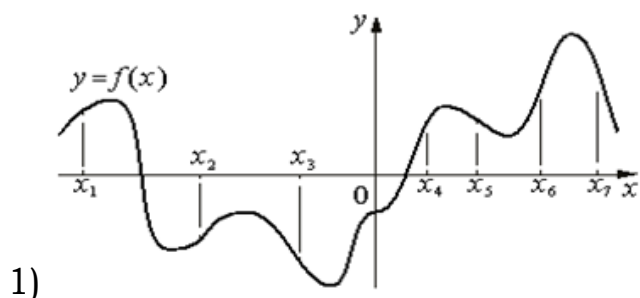
Задание 15.

а) Прямая $y = 3x + 4$ является касательной к графику функции $f(x) = 3x^2 - 3x + c$. Найдите c .

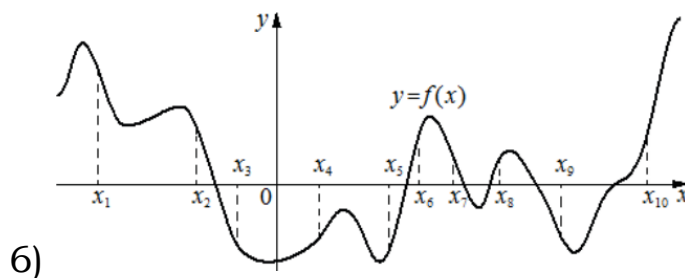
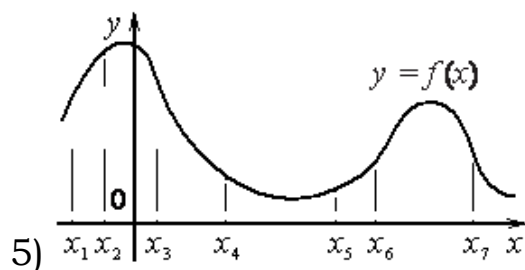
б) Прямая $y = -3x - 5$ является касательной к графику функции $f(x) = x^2 + 7x + c$. Найдите c .

III) Исследование функций (производная)

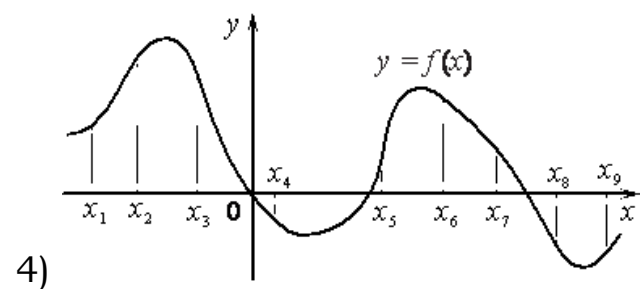
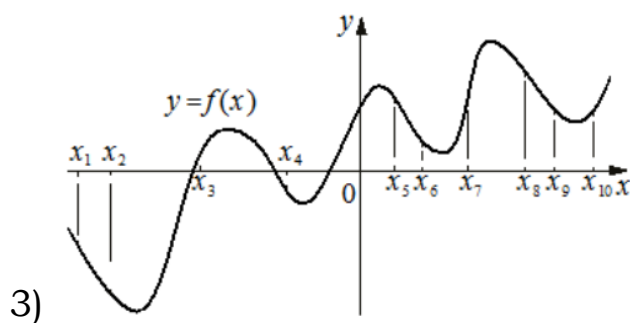
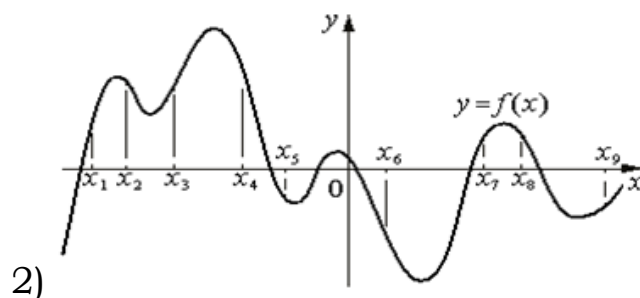
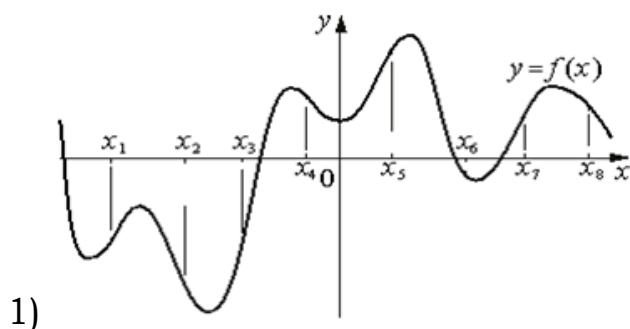
Задание 16. (ОБЗ) На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены n точек: $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



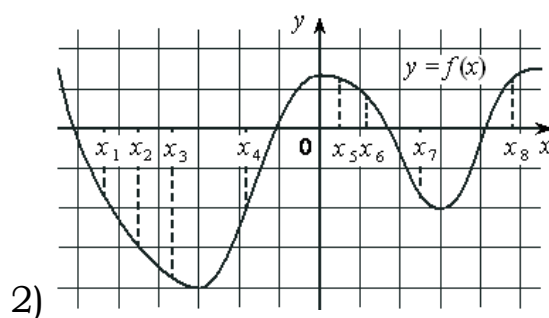
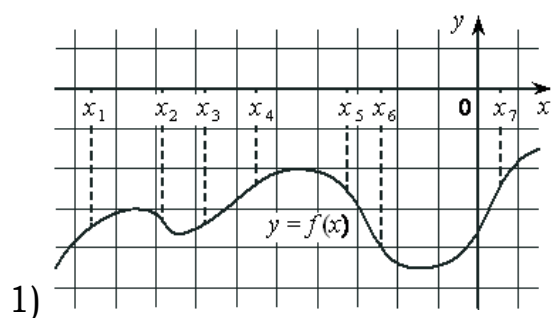
Задание 16. (ОБЗ) На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены n точек: $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



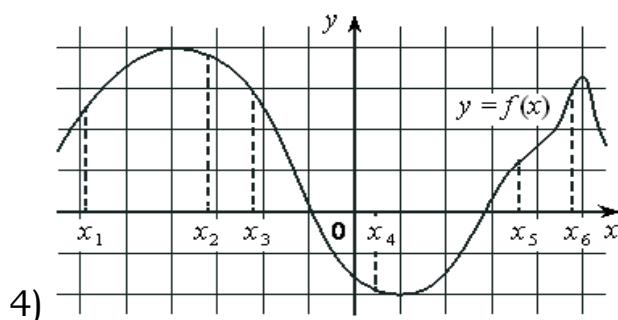
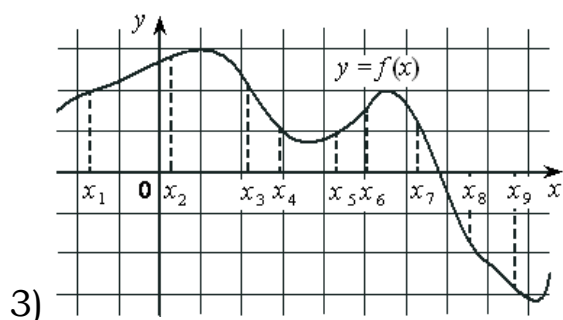
Задание 17. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены n точек: $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



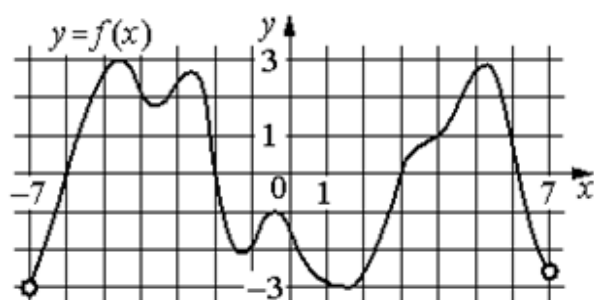
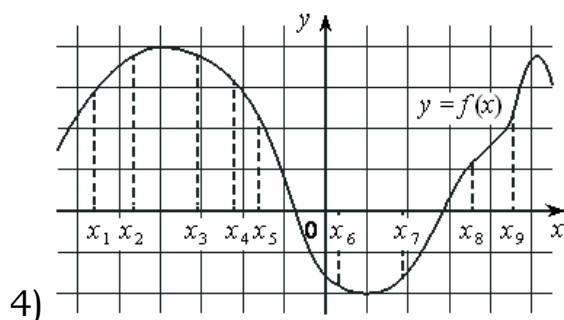
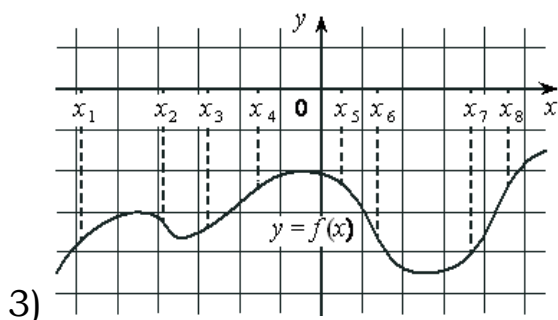
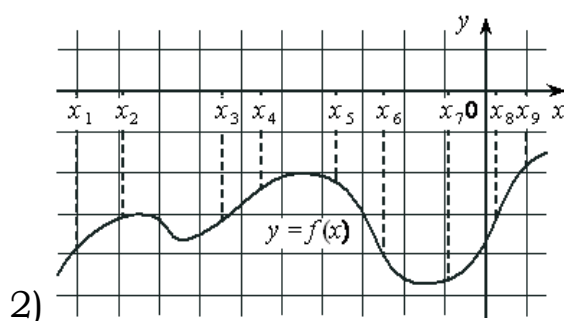
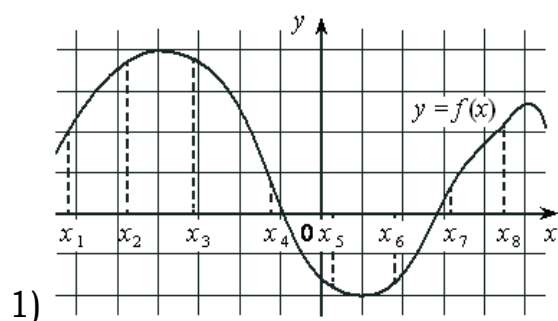
Задание 18. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены n точек: $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



Задание 18. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены n точек: $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?

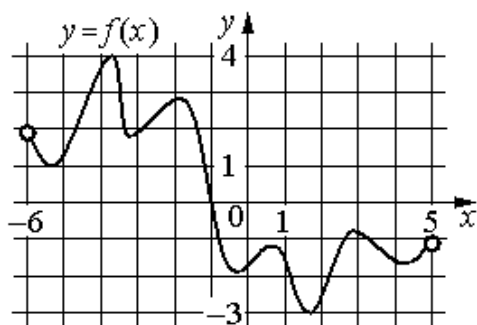


Задание 19. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены n точек: $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



Задание 20. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 7)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции...

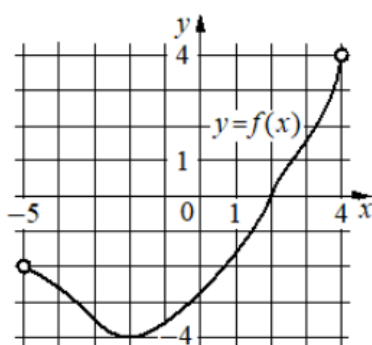
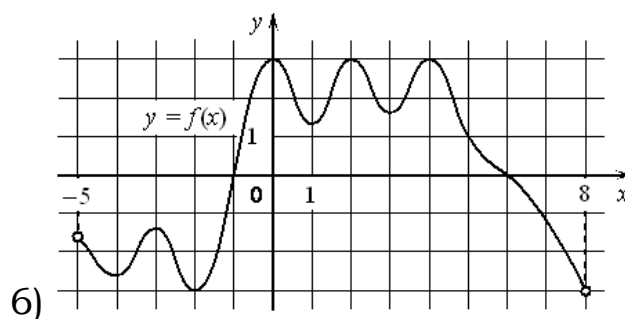
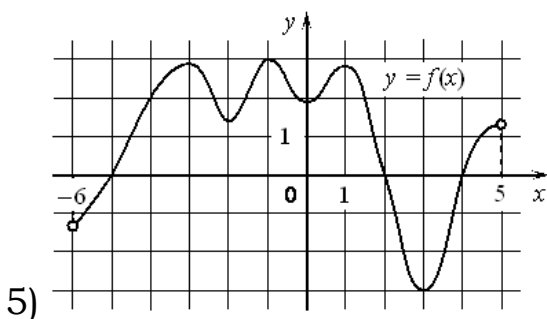
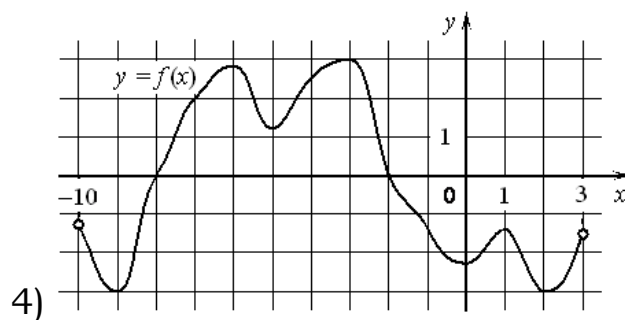
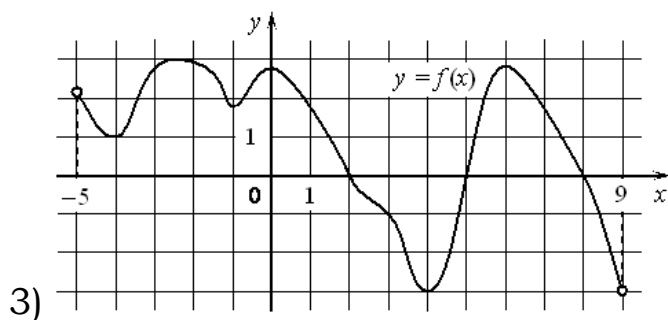
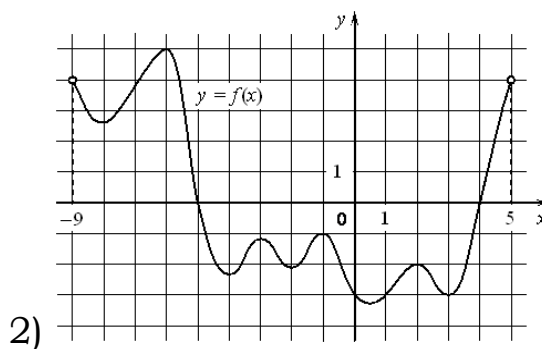
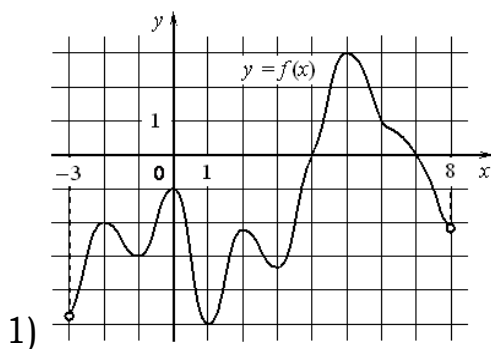
- 1) положительна;
- 2) отрицательна?



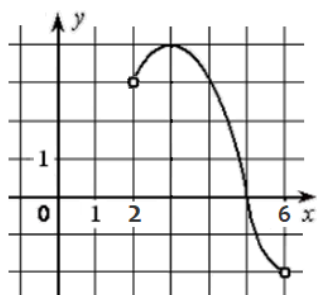
Задание 21. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 5)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции ...

- 1) положительна;
- 2) отрицательна?

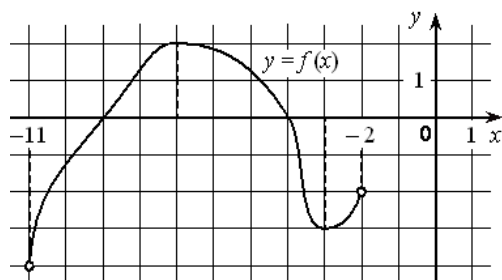
Задание 22. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(a; b)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



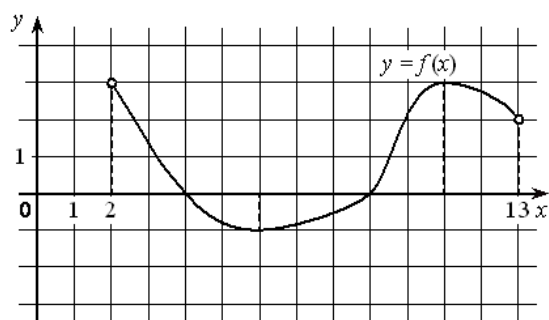
Задание 23. (ОБЗ) На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 4)$. Найдите корень уравнения $f'(x) = 0$.



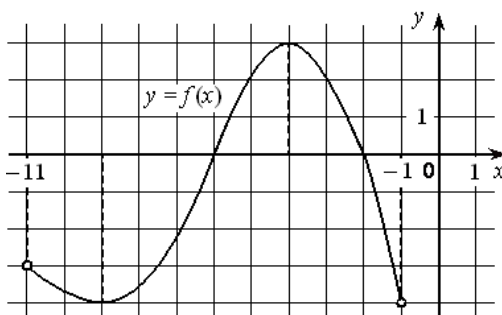
Задание 24. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(2; 6)$. Найдите корень уравнения $f'(x) = 0$.



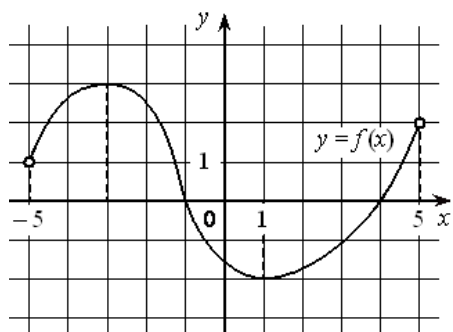
Задание 25. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-11; -2)$. Найдите точку из отрезка $[-10; -4]$, в которой производная функции $f(x)$ равна 0.



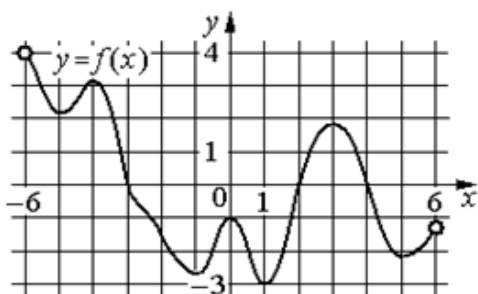
Задание 26. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(2; 13)$. Найдите точку из отрезка $[7; 12]$, в которой производная функции $f(x)$ равна 0.



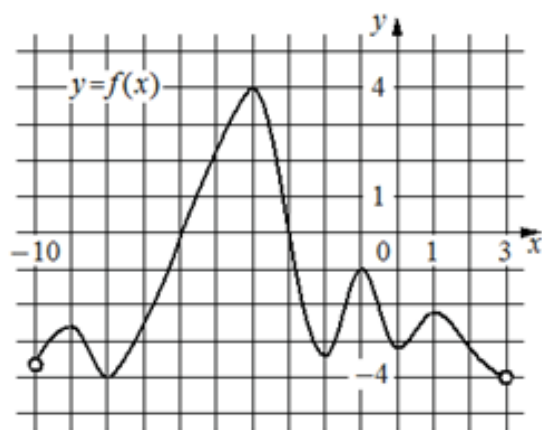
Задание 27. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-11; -1)$. Найдите точку из отрезка $[-7; -2]$, в которой производная функции $f(x)$ равна 0.



Задание 28. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 5)$. Найдите точку из отрезка $[-2; 4]$, в которой производная функции $f(x)$ равна 0.

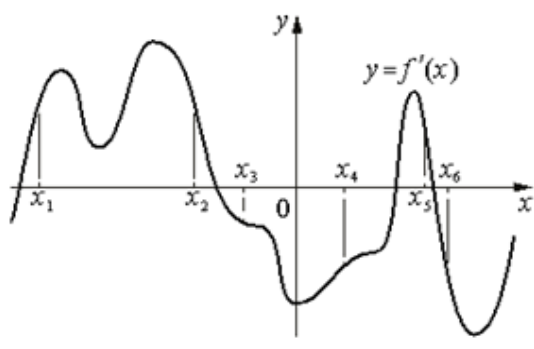


Задание 29. (ОБЗ) На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 6)$. Найдите количество решений уравнения $f'(x) = 0$ на отрезке $[-4, 5; 2, 5]$.

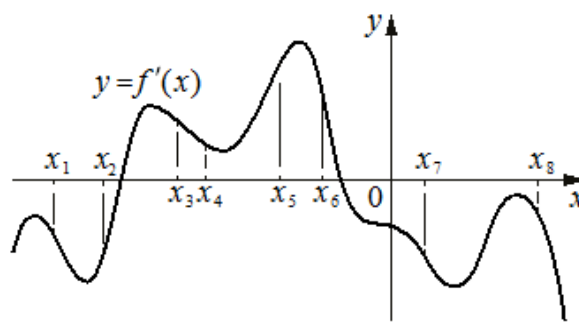


Задание 30. (ОБЗ) На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-10; 3)$. Найдите количество решений уравнения $f'(x) = 0$ на отрезке $[-7; 2]$.

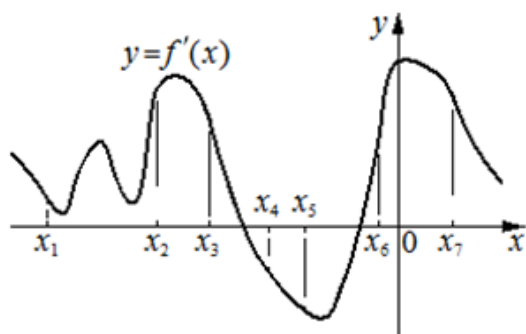
Задание 31. (ОБЗ) На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены n точек: $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$?



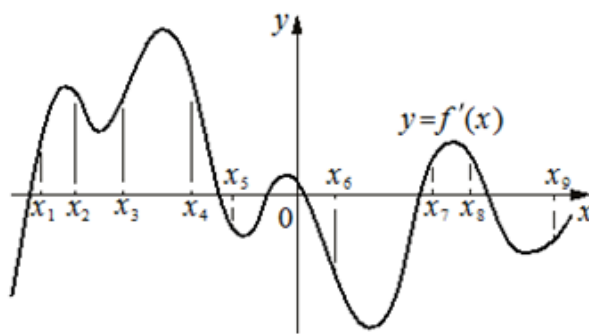
1)



2)

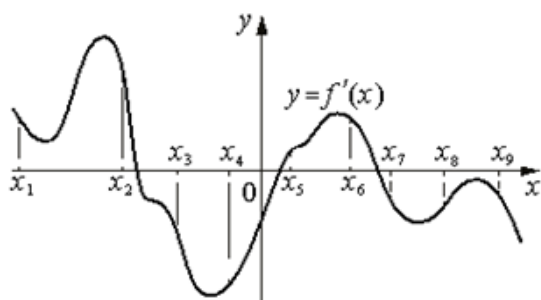


3)

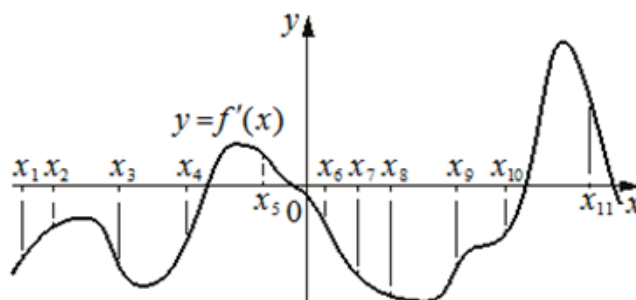


4)

Задание 32. (ОБЗ) На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены n точек: $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. Сколько из этих точек лежит на промежутках убывания функции $f(x)$?



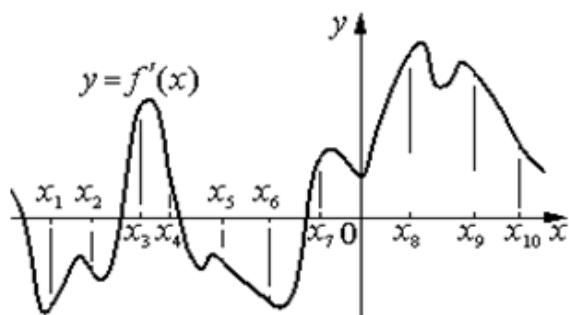
1)



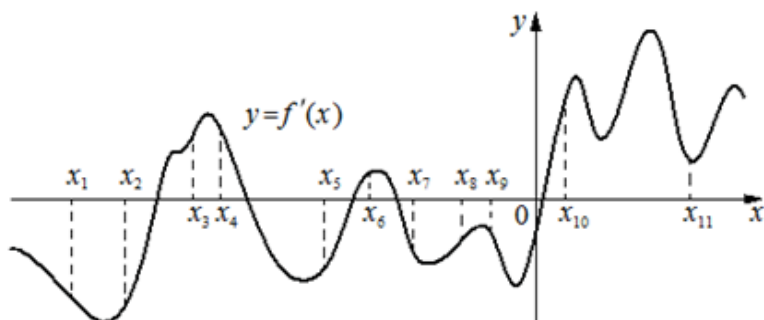
2)

Задание 32. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены n точек: $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. Сколько из этих точек лежит на промежутках убывания функции $f(x)$?

3)

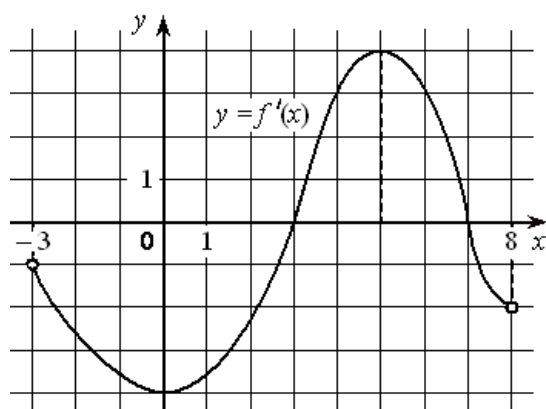


4)

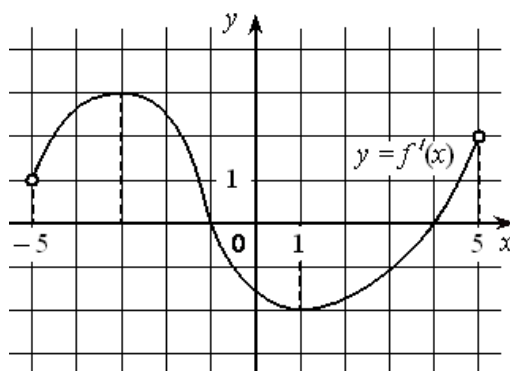


Задание 33. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(a; b)$. Найдите точку максимума функции $f(x)$.

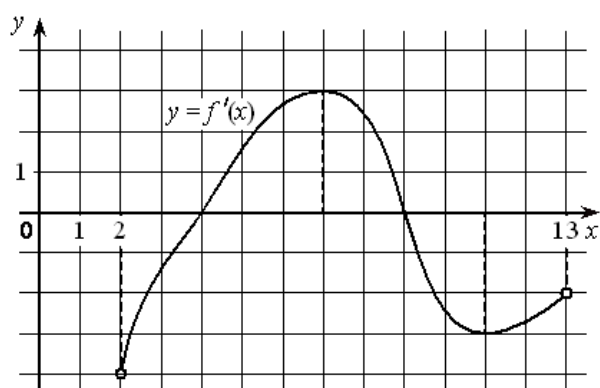
1)



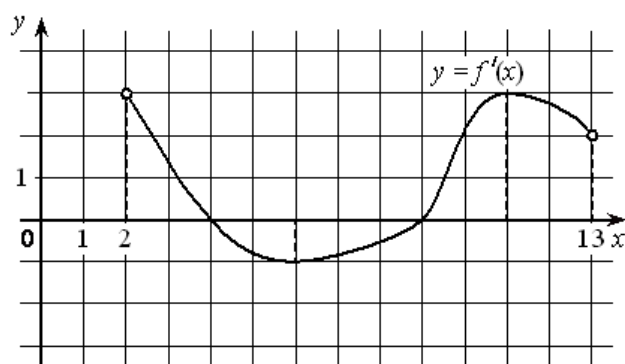
2)



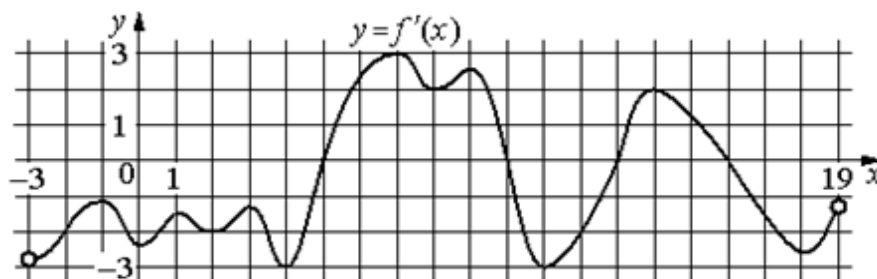
3)



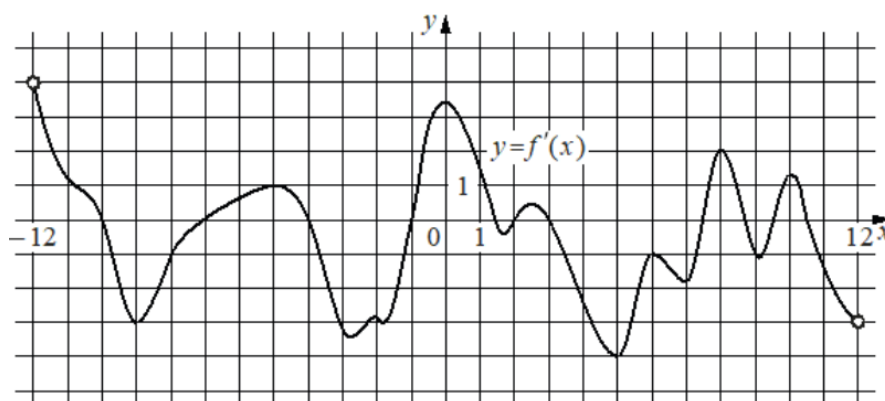
4)



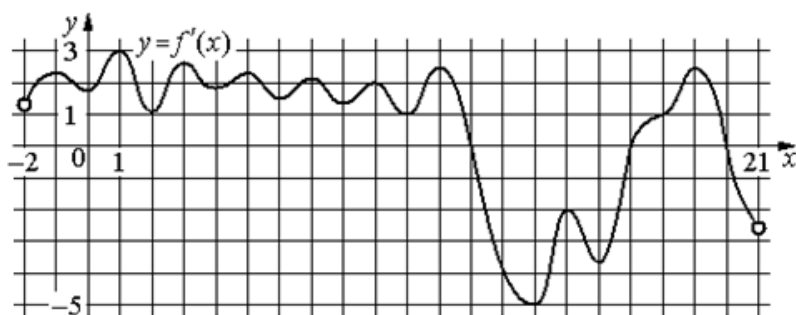
Задание 34. (ОБЗ) На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 19)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-2; 15]$.



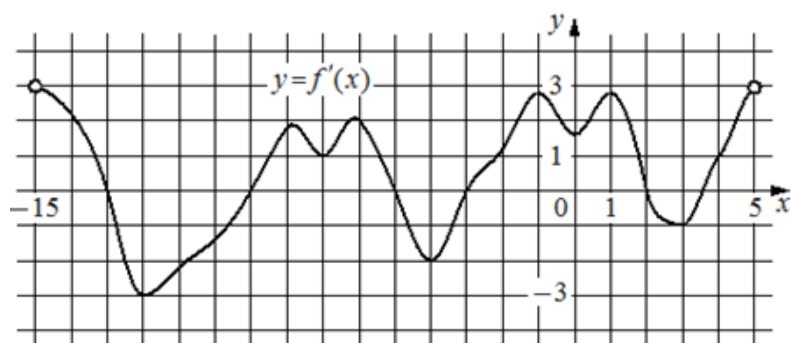
Задание 35. (ОБЗ) На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-12; 12)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-6; 11]$.



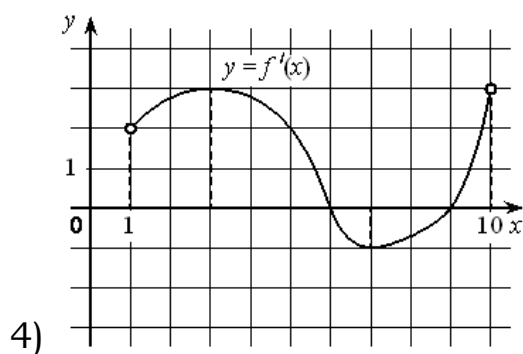
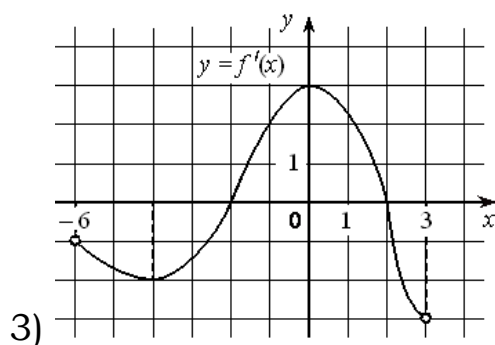
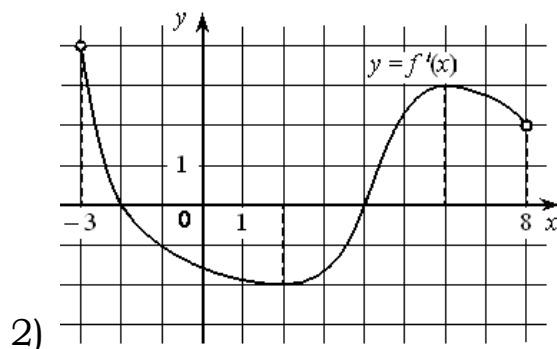
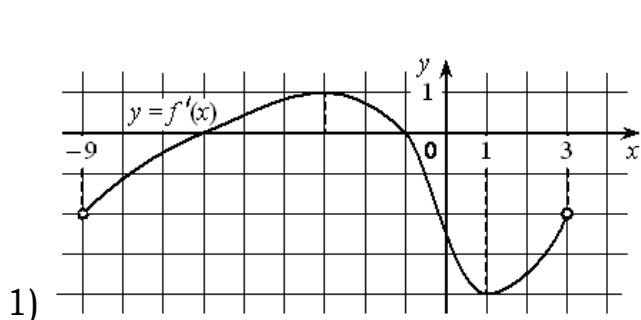
Задание 36. (ОБЗ) На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 21)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-1; 16]$.



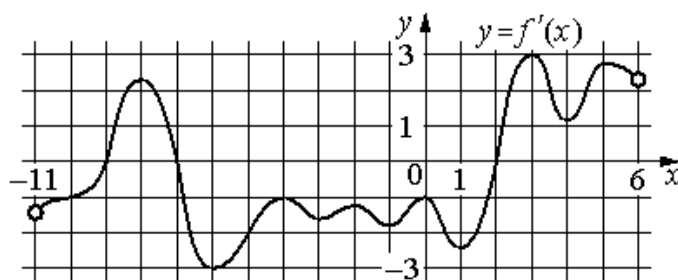
Задание 37. (ОБЗ) На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-15; 5)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-11; 4]$.



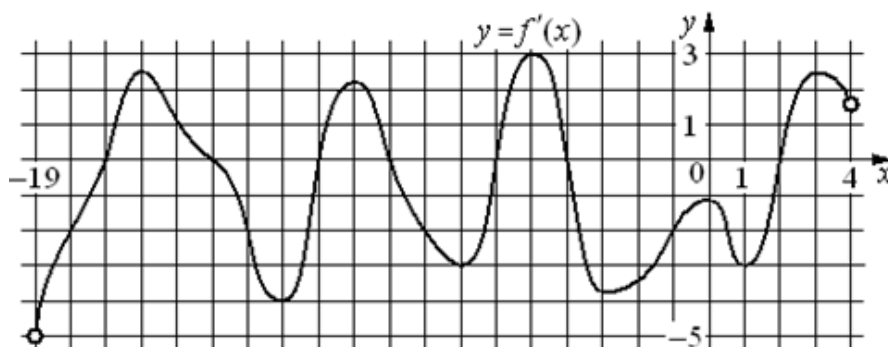
Задание 38. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(a; b)$. Найдите точку минимума функции $f(x)$.

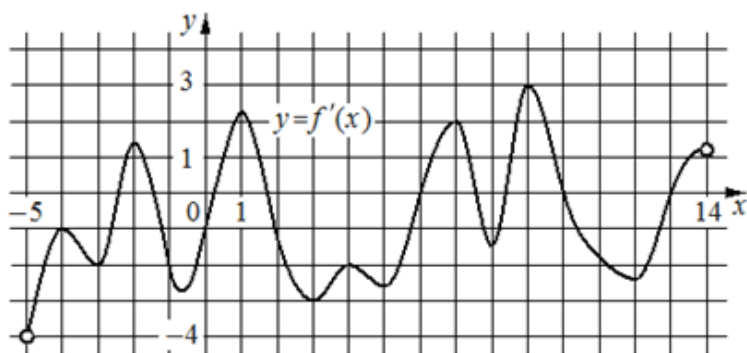


Задание 39. (ОБЗ) На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-11; 6)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ принадлежащих отрезку $[-6; 4]$.

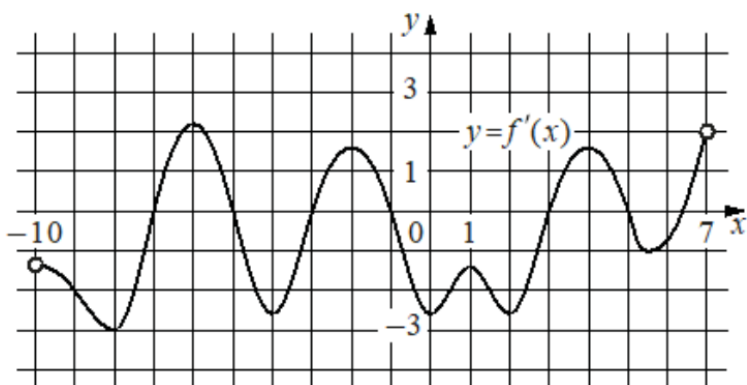


Задание 40. (ОБЗ) На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-19; 4)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-18; 3]$.

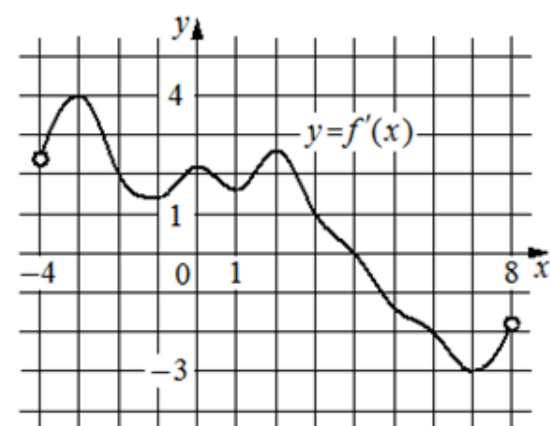




Задание 41. (ОБЗ) На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 14)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-4; 9]$.

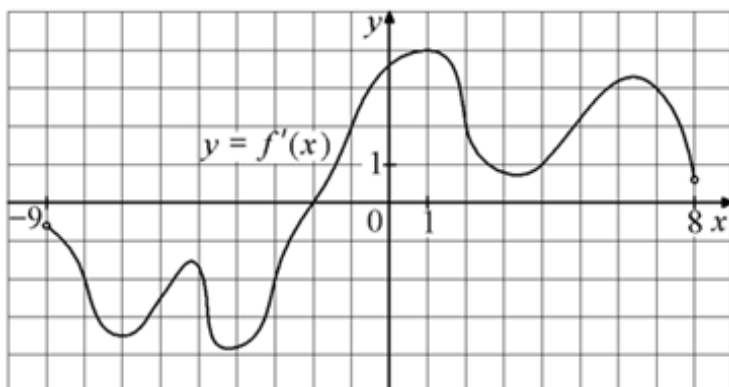


Задание 42. (ОБЗ) На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-10; 7)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-2; 6]$.

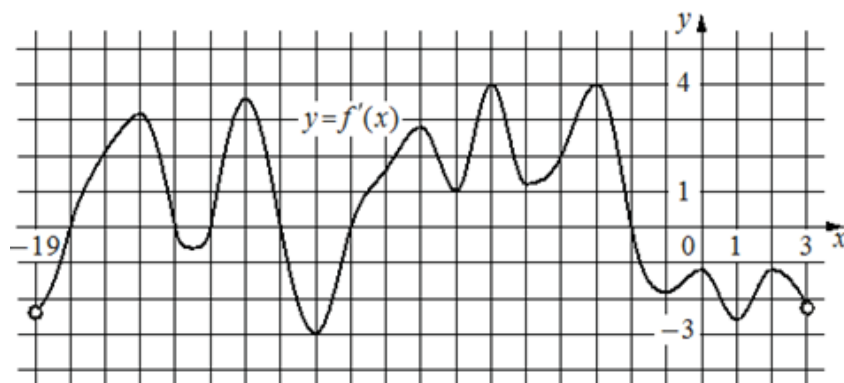


Задание 43. (ОБЗ) На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 8)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[1; 6]$.

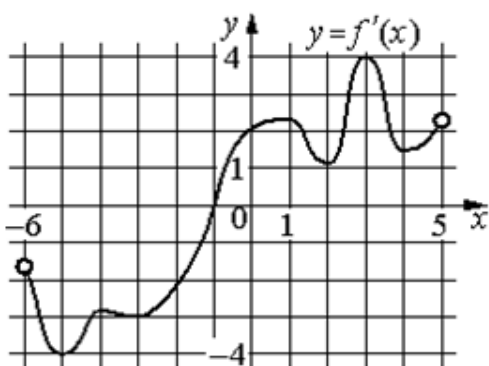
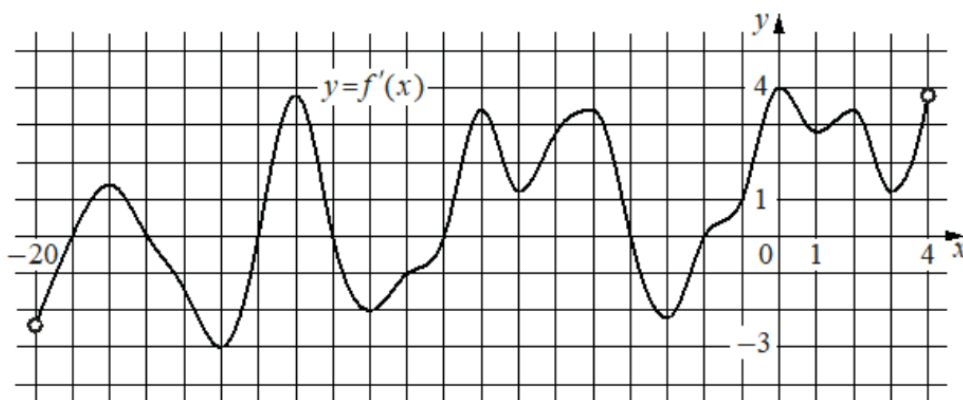
Задание 44. (ОБЗ) На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9; 8)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-3; 3]$.



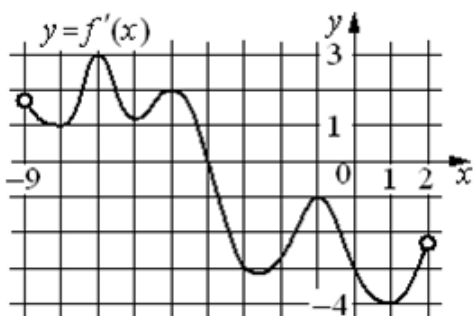
Задание 45. (ОБЗ) На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-19; 3)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-17; 2]$.



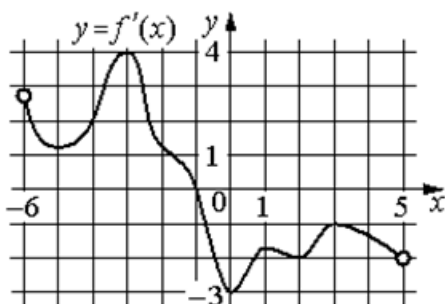
Задание 46. (ОБЗ) На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-20; 4)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-16; 1]$.



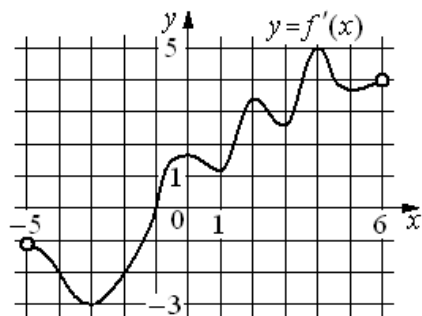
Задание 47. (ОБЗ) На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 5)$. В какой точке отрезка $[-5; -1]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



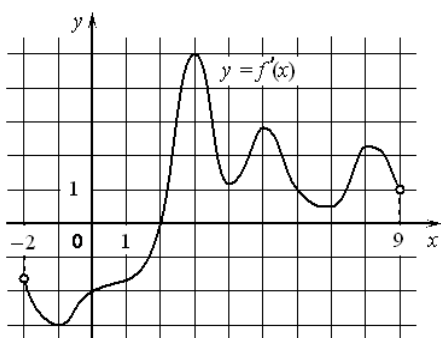
Задание 48. (ОБЗ) На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9; 2)$. В какой точке отрезка $[-8; -4]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



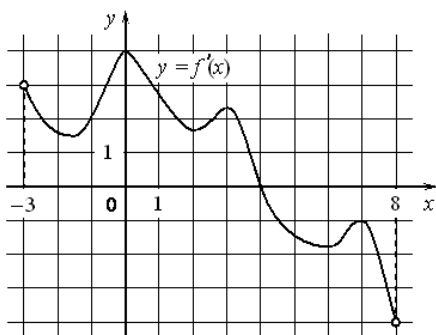
Задание 49. (ОБЗ) На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 5)$. В какой точке отрезка $[-3; 4]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



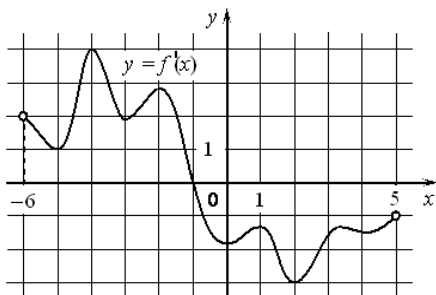
Задание 50. (ОБЗ) На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 6)$. В какой точке отрезка $[-1; 3]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



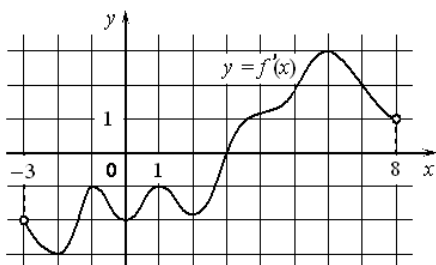
Задание 51. (ОБЗ) На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 9)$. В какой точке отрезка $[2; 8]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



Задание 52. (ОБЗ) На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. В какой точке отрезка $[-2; 3]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?

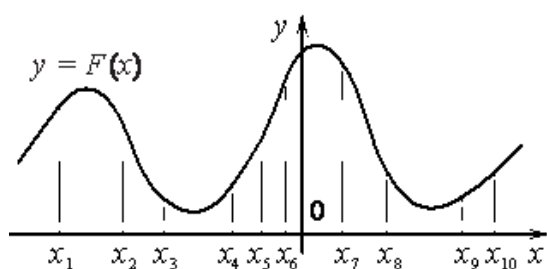


Задание 53. (ОБЗ) На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 5)$. В какой точке отрезка $[-5; -1]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?

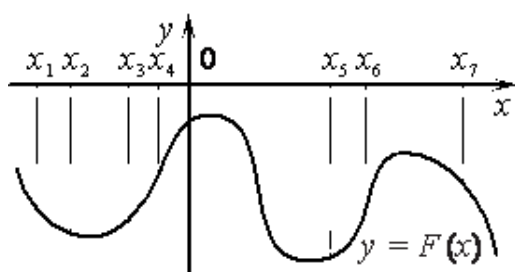


Задание 54. (ОБЗ) На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. В какой точке отрезка $[-2; 3]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?

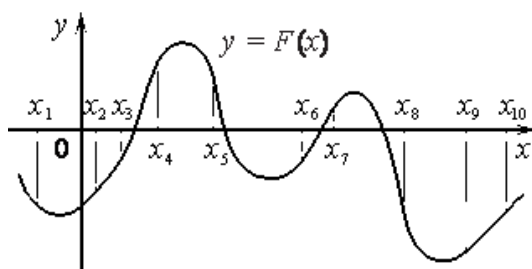
IV) Первообразная



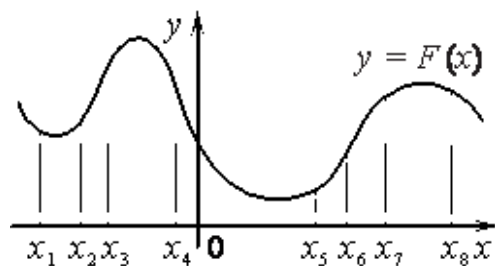
Задание 55. На рисунке изображён график $y = F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$ и отмечены n точек на оси абсцисс: $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ положительна?



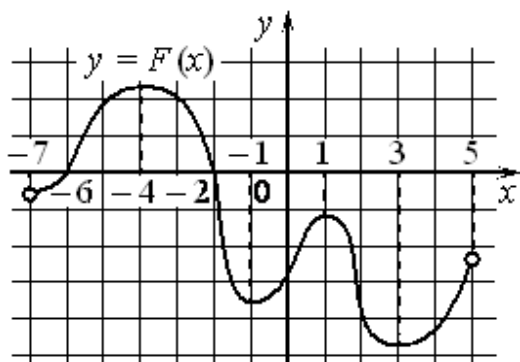
Задание 56. На рисунке изображён график $y = F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$ и отмечены n точек на оси абсцисс: $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ положительна?



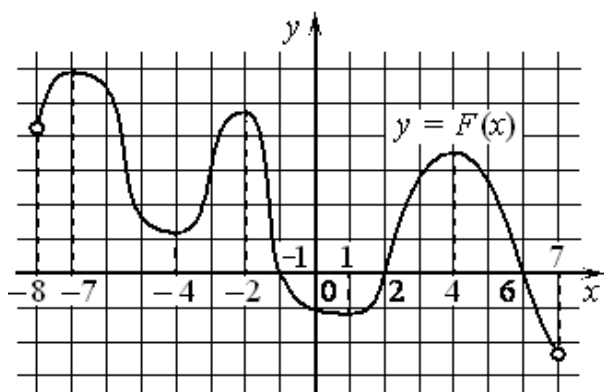
Задание 57. На рисунке изображён график $y = F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$ и отмечены n точек на оси абсцисс: $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ отрицательна?



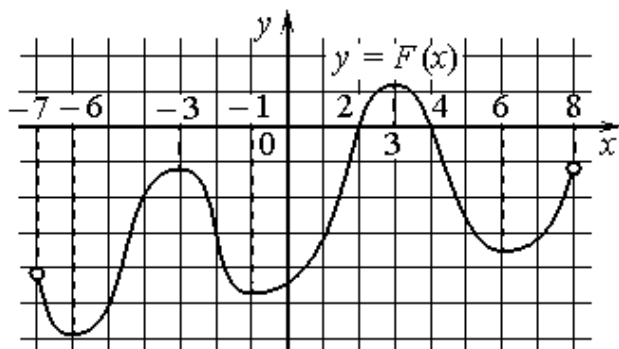
Задание 58. На рисунке изображён график $y = F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$ и отмечены n точек на оси абсцисс: $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ отрицательна?



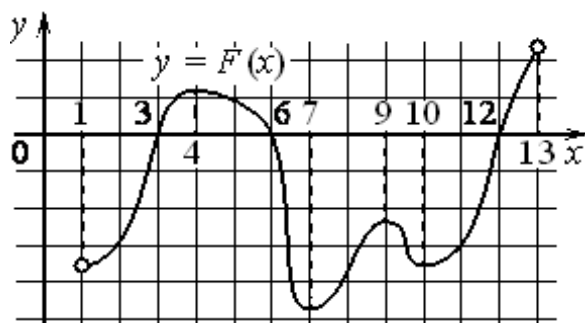
Задание 59. На рисунке изображён график $y = F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7; 5)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-5; 2]$.



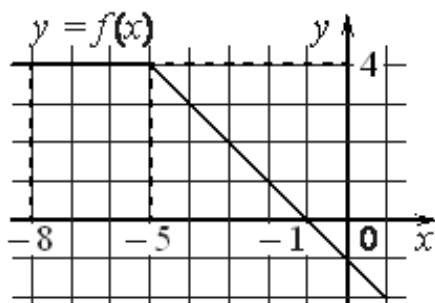
Задание 60. На рисунке изображён график $y = F'(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-5; 5]$.



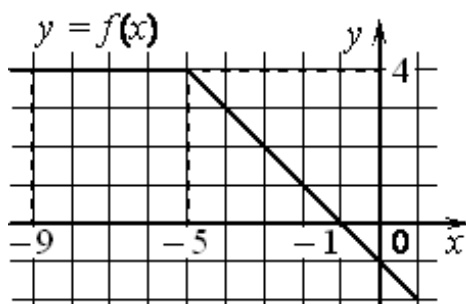
Задание 61. На рисунке изображён график $y = F'(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7; 8)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[0; 5]$.



Задание 62. На рисунке изображён график $y = F'(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(1; 13)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[2; 11]$.



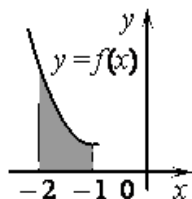
Задание 63. На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(-1) - F(-8)$, где $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$.



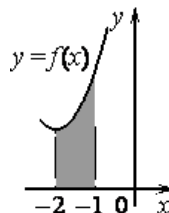
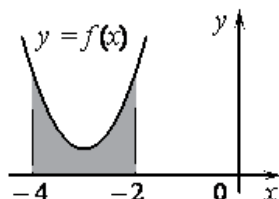
Задание 64. На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(-1) - F(-9)$, где $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$.

Задание 65. На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры:

1) $F(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + 6$



3) $F(x) = \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 + \frac{15}{2}x + \frac{7}{2}$

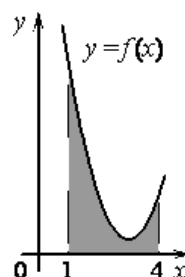
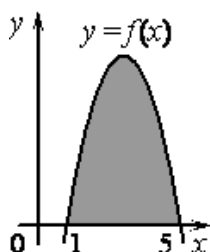


2) $F(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 14x + 8$

4) $F(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 15x - 5$

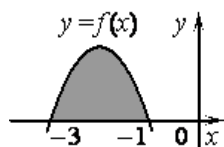


6) $F(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 14x - 10$

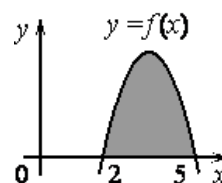
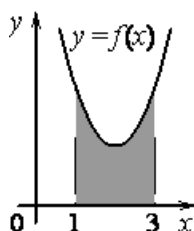


5) $F(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{15}{2}x - 1$

7) $F(x) = -\frac{1}{2}x^3 - 3x^2 - \frac{9}{2}x + 3$



9) $F(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{21}{4}x^2 - 15x - 4$



8) $F(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{15}{2}x - \frac{9}{2}$