

14. Стереометрическая задача

Блок 1. ФИПИ

1) Куб

1.1. (ОБЗ) В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки M и N – середины рёбер AB и AD соответственно.

- а) Докажите, что прямые $B_1 N$ и CM перпендикулярны.
- б) Плоскость α проходит через точки N и B_1 параллельно прямой CM . Найдите расстояние от точки C до плоскости α , если $B_1 N = 6$.

1.2. (ОБЗ) В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки M и N – середины рёбер AB и AD соответственно.

- а) Докажите, что прямые $B_1 N$ и CM перпендикулярны.
- б) Плоскость α проходит через точки N и B_1 параллельно прямой CM . Найдите расстояние от точки C до плоскости α , если $B_1 N = 9$.

2.1. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 3. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 2$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

- а) Докажите, что плоскость α проходит через середину ребра $A_1 B_1$.
- б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани $BB_1 C_1 C$.

2.2. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 5. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 4$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

- а) Докажите, что $A_1 P : PB_1 = 3 : 1$, где P – точка пересечения плоскости α с ребром $A_1 B_1$.
- б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани $BB_1 C_1 C$.

2.3. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 4. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

- а) Докажите, что $A_1 P : PB_1 = 2 : 1$, где P – точка пересечения плоскости α с ребром $A_1 B_1$.
- б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани $BB_1 C_1 C$.

3.1. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 5. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

- а) Докажите, что $A_1 P : PB_1 = 1 : 2$, где P – точка пересечения плоскости α с ребром $A_1 B_1$.
- б) Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α .

3.2. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 6. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB=5$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

а) Докажите, что $A_1 P : P B_1 = 4 : 1$, где P – точка пересечения плоскости α с ребром $A_1 B_1$.

б) Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α .

3.3. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 7. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB=4$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

а) Докажите, что $A_1 P : P B_1 = 1 : 3$, где P – точка пересечения плоскости α с ребром $A_1 B_1$.

б) Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α .

II) Параллелепипед

4.1. (ОБЗ) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ через середину M диагонали AC_1 проведена плоскость α перпендикулярно этой диагонали, $AB=5$, $BC=3$ и $AA_1=4$.

а) Докажите, что плоскость α содержит точку D_1 .

б) Найдите отношение, в котором плоскость альфа делит ребро $A_1 B_1$.

4.2. (ОБЗ) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ через середину M диагонали AC_1 проведена плоскость α перпендикулярно этой диагонали, $AB=13$, $BC=5$ и $AA_1=12$.

а) Докажите, что плоскость α содержит точку D_1 .

б) Найдите отношение, в котором плоскость альфа делит ребро $A_1 B_1$.

5.1. (ОБЗ) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB=6\sqrt{2}$, $AD=10$, $AA_1=16$. На рёбрах AA_1 и BB_1 отмечены точки E и F соответственно, причём $A_1 E : EA = 5 : 3$ и $B_1 F : FB = 5 : 11$. Точка T – середина ребра $B_1 C_1$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через точку D_1 .

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT .

5.2. (ОБЗ) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB=2\sqrt{2}$, $AD=6$, $AA_1=10$. На рёбрах AA_1 и BB_1 отмечены точки E и F соответственно, причём $A_1 E : EA = 3 : 2$ и $B_1 F : FB = 3 : 7$. Точка T – середина ребра $B_1 C_1$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через точку D_1 .

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT .

5.3. (ОБЗ) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB=4\sqrt{2}$, $AD=30$, $AA_1=35$. На рёбрах AA_1 и BB_1 отмечены точки E и F соответственно, причём $A_1E:EA=6:1$ и $B_1F:FB=3:4$. Точка T – середина ребра B_1C_1 .

- а) Докажите, что плоскость EFT проходит через точку D_1 .
- б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT .

6.1. (ОБЗ) На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1E:EA=1:2$, на ребре BB_1 – точка F так, что $B_1F:FB=1:5$, а точка T – середина ребра B_1C_1 . Известно, что $AB=2$, $AD=6$, $AA_1=6$.

- а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .
- б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью AA_1B_1 .

6.2. (ОБЗ) На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1E:EA=2:3$, на ребре BB_1 – точка F так, что $B_1F:FB=1:4$, а точка T – середина ребра B_1C_1 . Известно, что $AB=6$, $AD=4$, $AA_1=10$.

- а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .
- б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью AA_1B_1 .

6.3. (ОБЗ) На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1E:EA=2:5$, на ребре BB_1 – точка F так, что $B_1F:FB=1:6$, а точка T – середина ребра B_1C_1 . Известно, что $AB=5$, $AD=6$, $AA_1=14$.

- а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .
- б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью AA_1B_1 .

7.1. (ОБЗ) Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью α , содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC , является ромб.

- а) Докажите, что грань $ABCD$ – квадрат.
- б) Найдите угол между плоскостями α и BCC_1 , если $AA_1=10$, $AB=12$.

7.2. (ОБЗ) Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью α , содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC , является ромб.

- а) Докажите, что грань $ABCD$ – квадрат.
- б) Найдите угол между плоскостями α и BCC_1 , если $AA_1=6$, $AB=4$.

7.3. (ОБЗ) Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью α , содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC , является ромб.

- а) Докажите, что грань $ABCD$ – квадрат.
- б) Найдите угол между плоскостями α и BCC_1 , если $AA_1=16$, $AB=15$.

7.4. (ОБЗ) Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью α , содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC , является ромб.

а) Докажите, что грань $ABCD$ – квадрат.

б) Найдите угол между плоскостями α и BCC_1 , если $AA_1=12$, $AB=8$.

III) Четырёхугольная призма

8.1. (ОБЗ) Дана правильная четырёхугольная призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Плоскость α проходит через вершины B_1 и D и пересекает рёбра AA_1 и CC_1 в точках M и K соответственно. Известно, что четырёхугольник MB_1KD – ромб.

а) Докажите, что точка M – середина ребра AA_1 .

б) Найдите высоту призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, если площадь её основания $ABCD$ равна 3, а площадь ромба MB_1KD равна 6.

8.2. (ОБЗ) Дана правильная четырёхугольная призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Плоскость α проходит через вершины B_1 и D и пересекает рёбра AA_1 и CC_1 в точках M и K соответственно. Известно, что четырёхугольник MB_1KD – ромб.

а) Докажите, что точка M – середина ребра AA_1 .

б) Найдите высоту призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, если площадь её основания $ABCD$ равна 4, а площадь ромба MB_1KD равна $4\sqrt{2}$.

9.1. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 8, а боковое ребро AA_1 равно $4\sqrt{2}$. На рёбрах BC и C_1D_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $BK=C_1L=2$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .

а) Докажите, что прямая A_1C перпендикулярна плоскости γ .

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости γ .

9.2. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 12, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{6}$. На рёбрах BC и C_1D_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $BK=2$, $C_1L=8$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .

а) Докажите, что прямая A_1C перпендикулярна плоскости γ .

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости γ .

10.1. (ОБЗ) В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит параллелограмм $ABCD$ с углом 60° при вершине A . На рёбрах $A_1 B_1$, $B_1 C_1$ и BC отмечены точки M , K и N соответственно так, что четырёхугольник $AMKN$ – равнобедренная трапеция с основаниями 1 и 2.

а) Докажите, что точка M – середина ребра $A_1 B_1$.

б) Найдите высоту призмы, если её объём равен 5 и известно, что точка K делит ребро $B_1 C_1$ в отношении $B_1 K : KC_1 = 2 : 3$.

10.2. (ОБЗ) В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит параллелограмм $ABCD$ с углом 60° при вершине A . На рёбрах $A_1 B_1$, $B_1 C_1$ и BC отмечены точки M , K и N соответственно так, что четырёхугольник $AMKN$ – равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 4.

а) Докажите, что точка M – середина ребра $A_1 B_1$.

б) Найдите высоту призмы, если её объём равен 16 и известно, что точка K делит ребро $B_1 C_1$ в отношении $B_1 K : KC_1 = 1 : 3$.

11.1. На ребре AA_1 правильной четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отмечена точка K , причём $AK : KA_1 = 1 : 2$. Через точки K и B проведена плоскость α , параллельная прямой AC и пересекающая ребро DD_1 в точке M .

а) Докажите, что $DM : MD_1 = 2 : 1$.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α , если $AB = 4$, $AA_1 = 6$.

11.2. На ребре AA_1 правильной четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отмечена точка K , причём $AK : KA_1 = 1 : 2$. Через точки K и B проведена плоскость α , параллельная прямой AC и пересекающая ребро DD_1 в точке M .

а) Докажите, что $DM : MD_1 = 2 : 1$.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α , если $AB = 3$, $AA_1 = 9$.

12.1. (ОБЗ) В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит параллелограмм $ABCD$. На рёбрах $A_1 B_1$, $B_1 C_1$ и BC отмечены точки M , K и N соответственно, причём $B_1 K : KC_1 = 1 : 2$. Четырёхугольник $AMKN$ – равнобедренная трапеция с основаниями 4 и 6.

а) Докажите, что точка N – середина ребра BC .

б) Найдите площадь трапеции $AMKN$, если объём призмы равен 72, а высота призмы равна 2.

12.2. (ОБЗ) В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит параллелограмм $ABCD$. На рёбрах $A_1 B_1$, $B_1 C_1$ и BC отмечены точки M , K и N соответственно, причём $B_1 K : KC_1 = 1 : 2$. Четырёхугольник $AMKN$ – равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 3.

а) Докажите, что точка N – середина ребра BC .

б) Найдите площадь трапеции $AMKN$, если объём призмы равен 12, а высота призмы равна 2.

13.1. (ОБЗ) В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD=3$ и $BC=2$. Точка M делит ребро $A_1 D_1$ в отношении $A_1 M : MD_1 = 1 : 2$, а точка K – середина ребра DD_1 .

а) Докажите, что плоскость MKC делит отрезок BB_1 пополам.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MKC , если $\angle MKC = 90^\circ$, $\angle ADC = 60^\circ$.

13.2. (ОБЗ) В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD=4$ и $BC=3$. Точка M делит ребро $A_1 D_1$ в отношении $A_1 M : MD_1 = 1 : 3$, а точка K – середина ребра DD_1 .

а) Докажите, что плоскость MKC делит отрезок BB_1 пополам.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MKC , если $\angle MKC = 90^\circ$, $\angle ADC = 60^\circ$.

14.1. (ОБЗ) В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD=5$ и $BC=4$. Точка M делит ребро $A_1 D_1$ в отношении $A_1 M : MD_1 = 1 : 4$, а точка K – середина ребра DD_1 .

а) Докажите, что плоскость MKC параллельна прямой BD .

б) Найдите тангенс угла между плоскостью MKC и плоскостью основания призмы, если $\angle MKC = 90^\circ$, $\angle ADC = 60^\circ$.

14.2. (ОБЗ) В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD=3$ и $BC=2$. Точка M делит ребро $A_1 D_1$ в отношении $A_1 M : MD_1 = 1 : 2$, а точка K – середина ребра DD_1 .

а) Докажите, что плоскость MKC параллельна прямой BD .

б) Найдите тангенс угла между плоскостью MKC и плоскостью основания призмы, если $\angle MKC = 90^\circ$, $\angle ADC = 60^\circ$.

15.1. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{3}$. На рёбрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $BK = C_1 L = 2$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .

а) Докажите, что прямая $A_1 C$ перпендикулярна плоскости γ .

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка A_1 , а основание – сечение данной призмы плоскостью γ .

15.2. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 4, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{2}$. На рёбрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $BK = C_1 L = 1$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .

а) Докажите, что прямая $A_1 C$ перпендикулярна плоскости γ .

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка A_1 , а основание – сечение данной призмы плоскостью γ .

IV) Треугольная призма

16.1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На ребре AB отмечена точка K так, что $AK=1$. Точки M и L – середины рёбер A_1C_1 и B_1C_1 соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L .

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ .

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости γ .

16.2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 12, а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{6}$. На рёбрах AB и B_1C_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $AK=2$, $B_1L=4$. Точка M – середина ребра A_1C_1 . Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L .

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ .

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости γ .

17.1. (ОБЗ) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 4. На рёбрах AA_1 и BB_1 и отмечены точки M и N соответственно, причём $AM=BN=3$.

а) Точки O и O_1 – центры окружностей, описанных около треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно. Докажите, что прямая OO_1 содержит точку пересечения медиан треугольника CMN .

б) Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости CMN .

17.2. (ОБЗ) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 8, а боковое ребро AA_1 равно 3. На рёбрах AA_1 и BB_1 и отмечены точки M и N соответственно, причём $AM=BN=2$.

а) Точки O и O_1 – центры окружностей, описанных около треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно. Докажите, что прямая OO_1 содержит точку пересечения медиан треугольника CMN .

б) Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости CMN .

18.1. (ОБЗ) В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AB . Точка P делит ребро AB в отношении $AP:PB=1:3$, а точка Q – середина ребра A_1C_1 .

Через середину M ребра BC провели плоскость α , перпендикулярную отрезку PQ .

а) Докажите, что плоскость α параллельна ребру AB .

//а) Докажите, что плоскость α делит ребро AC пополам.

б) Найдите отношение, в котором плоскость α делит отрезок PQ , считая от точки P , если известно, что $AB=AA_1$, $AB:BC=2:5$.

18.2. (ОБЗ) В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AB . Точка P делит ребро AB в отношении $AP:PB=1:3$, а точка Q – середина ребра A_1C_1 .

Через середину M ребра BC провели плоскость α , перпендикулярную отрезку PQ .

а) Докажите, что плоскость α параллельна ребру AB .

//а) Докажите, что плоскость α делит ребро AC пополам.

б) Найдите отношение, в котором плоскость α делит отрезок PQ , считая от точки P , если известно, что $AB=AA_1$, $AB:BC=2:7$.

19.1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{2}$. На рёбрах AB , A_1B_1 и B_1C_1 отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM=B_1N=C_1K=1$.

а) Пусть L – точка пересечения плоскости MNK с ребром AC . Докажите, что $MNKL$ – квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .

19.2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{2}$. На рёбрах AB , A_1B_1 и B_1C_1 отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM=B_1N=C_1K=2$.

а) Пусть L – точка пересечения плоскости MNK с ребром AC . Докажите, что $MNKL$ – квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .

20.1. (ОБЗ) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известно, что $AB=2$. Плоскость α проходит через вершины A_1 и B и середину M ребра CC_1 .

а) Докажите, что сечение призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью α является равнобедренным треугольником.

б) Найдите высоту призмы, если площадь сечения плоскостью α равна 6.

20.2. (ОБЗ) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известно, что $AB=4$. Плоскость α проходит через вершины A_1 и B и середину M ребра CC_1 .

а) Докажите, что сечение призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью α является равнобедренным треугольником.

б) Найдите высоту призмы, если площадь сечения плоскостью α равна 9.

21.1. (ОБЗ) В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный ($AB=BC$) треугольник ABC . Точка K – середина ребра A_1B_1 , а точка M делит ребро AC в отношении $AM:MC=1:3$.

а) Докажите, что $KM \perp AC$.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABV_1 , если $AB=6$, $AC=8$ и $AA_1=3$.

21.2. (ОБЗ) В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный ($AB=BC$) треугольник ABC . Точка K – середина ребра A_1B_1 , а точка M делит ребро AC в отношении $AM:MC=1:3$.

а) Докажите, что $KM \perp AC$.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1 , если $AB=10$, $AC=16$ и $AA_1=5$.

22.1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На рёбрах AB и B_1C_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $AK=B_1L=2$. Точка M – середина ребра A_1C_1 . Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L .

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ .

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка M , а основание – сечение данной призмы плоскостью γ .

22.2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 12, а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{6}$. На рёбрах AB и B_1C_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $AK=B_1L=3$. Точка M – середина ребра A_1C_1 . Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L .

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ .

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка M , а основание – сечение данной призмы плоскостью γ .

V) Четырёхугольная пирамида

23.1. (ОБЗ) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ точка O – центр основания пирамиды, точка M – середина ребра SC , точка K делит ребро BC в отношении $BK:KC=3:1$, а $AB=2$ и $SO=\sqrt{14}$.

а) Докажите, что плоскость OMK параллельна прямой SA .

б) Найдите длину отрезка, по которому плоскость OMK пересекает грань SAD .

23.2. (ОБЗ) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ точка O – центр основания пирамиды, точка M – середина ребра SC , точка K делит ребро BC в отношении $BK:KC=2:1$, $AB=6$ и $SO=3\sqrt{7}$.

а) Докажите, что плоскость OMK параллельна прямой SA .

б) Найдите длину отрезка, по которому плоскость OMK пересекает грань SAD .

24.1. (ОБЗ) Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ равны 4. Точка O – центр основания пирамиды. Плоскость, параллельная прямой SA и проходящая через точку O , пересекает рёбра SC и SD в точках M и N соответственно. Точка N делит ребро SD в отношении $SN:ND=1:3$.

а) Докажите, что точка M – середина ребра SC .

б) Найдите длину отрезка, по которому плоскость OMN пересекает грань SBC .

24.2. (ОБЗ) Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ равны 10. Точка O – центр основания пирамиды. Плоскость, параллельная прямой SA и проходящая через точку O , пересекает рёбра SC и SD в точках M и N соответственно. Точка N делит ребро SD в отношении $SN:ND=2:3$.

а) Докажите, что точка M – середина ребра SC .

б) Найдите длину отрезка, по которому плоскость OMN пересекает грань SBC .

25.1. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=4$ и $BC=6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA=3$, $SB=5$, $SD=3\sqrt{5}$.

а) Докажите, что SA – высота пирамиды.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC .

25.2. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=12$ и $BC=5\sqrt{3}$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA=5$, $SB=13$, $SD=10$.

а) Докажите, что SA – высота пирамиды.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC .

26.1. (ОБЗ) В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB=5$ и диагональю $BD=9$. Все боковые рёбра пирамиды равны 5. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E , а на ребре AS – точка F так, что $SF=BE=4$.

а) Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру SB .

б) Плоскость CEF пересекает ребро SD в точке Q . Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC .

26.2. (ОБЗ) В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB=4$ и диагональю $BD=7$. Все боковые рёбра пирамиды равны 4. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E , а на ребре AS – точка F так, что $SF=BE=3$.

а) Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру SB .

б) Плоскость CEF пересекает ребро SD в точке Q . Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC .

27.1. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна 16, а высота пирамиды равна 4. На рёбрах AB , CD и AS отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM=DN=4$ и $AK=3$.

- а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.
- б) Найдите расстояние от точки K до плоскости SBC .

27.2. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна 6, а высота пирамиды равна $3\sqrt{2}$. На рёбрах AB , CD и AS отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM=DN=AK=2$.

- а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.
- б) Найдите расстояние от точки K до плоскости SBC .

28.1. (ОБЗ) В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$ с большим основанием AD . Диагонали трапеции пересекаются в точке O . Точки M и N – середины боковых сторон AB и CD соответственно. Плоскость α проходит через точки M и N параллельно прямой SO .

- а) Докажите, что сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью α является трапецией.
- б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью α , если $AD=7$, $BC=5$, $SO=4$, а прямая SO перпендикулярна прямой AD .

28.2. (ОБЗ) В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$ с большим основанием AD . Диагонали трапеции пересекаются в точке O . Точки M и N – середины боковых сторон AB и CD соответственно. Плоскость α проходит через точки M и N параллельно прямой SO .

- а) Докажите, что сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью α является трапецией.
- б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью α , если $AD=10$, $BC=8$, $SO=8$, а прямая SO перпендикулярна прямой AD .

29.1. (ОБЗ) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 8, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM=2$, $SK=1$. Плоскость α перпендикулярна плоскости ABC и содержит M и K .

- а) Докажите, что плоскость α содержит точку C .
- б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью α .

29.2. (ОБЗ) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM=SK=1$. Плоскость α перпендикулярна плоскости ABC и содержит M и K .

- а) Докажите, что плоскость α содержит точку C .
- б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью α .

30.1. (ОБЗ) Точка М – середина ребра SA правильной четырёхугольной пирамиды SABCD с основанием ABCD. Точка N лежит на ребре SB, $SN:NB=1:2$.

- а) Докажите, что плоскость CMN параллельна прямой SD.
- б) Найдите площадь сечения пирамиды SABCD плоскостью CMN, если все рёбра пирамиды равны 12.

30.2. (ОБЗ) Точка М – середина ребра SA правильной четырёхугольной пирамиды SABCD с основанием ABCD. Точка N лежит на ребре SB, $SN:NB=1:2$.

- а) Докажите, что плоскость CMN параллельна прямой SD.
- б) Найдите площадь сечения пирамиды SABCD плоскостью CMN, если все рёбра пирамиды равны 6.

31.1. В основании четырёхугольной пирамиды SABCD лежит прямоугольник ABCD со сторонами $AB=8$ и $BC=6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA=\sqrt{21}$, $SB=\sqrt{85}$, $SD=\sqrt{57}$.

- а) Докажите, что SA – высота пирамиды.
- б) Найдите угол между прямыми SC и BD.

31.2. В основании четырёхугольной пирамиды SABCD лежит прямоугольник ABCD со сторонами $AB=12$ и $BC=5$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA=3\sqrt{3}$, $SB=\sqrt{171}$, $SD=2\sqrt{13}$.

- а) Докажите, что SA – высота пирамиды.
- б) Найдите угол между прямыми SC и BD.

32.1. В основании четырёхугольной пирамиды SABCD лежит прямоугольник ABCD со сторонами $AB=4$ и $BC=3$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA=\sqrt{11}$, $SB=3\sqrt{3}$, $SD=2\sqrt{5}$.

- а) Докажите, что SA – высота пирамиды.
- б) Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB.

32.2. В основании четырёхугольной пирамиды SABCD лежит прямоугольник ABCD со сторонами $AB=\sqrt{5}$ и $BC=2$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA=\sqrt{7}$, $SB=2\sqrt{3}$, $SD=\sqrt{11}$.

- а) Докажите, что SA – высота пирамиды.
- б) Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB.

33.1. (ОБЗ) Основанием четырёхугольной пирамиды SABCD является прямоугольник ABCD, причём $AB=2\sqrt{2}$, $BC=4$. Основанием высоты пирамиды является центр прямоугольника. Из вершин A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB.

- а) Докажите, что P – середина отрезка BQ.
- б) Найдите угол между гранями SBA и SBC, если $SD=4$.

33.2. (ОБЗ) Основанием четырёхугольной пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, причём $AB=6$, $BC=6\sqrt{2}$. Основанием высоты пирамиды является центр прямоугольника. Из вершин A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB .

- Докажите, что P – середина отрезка BQ .
- Найдите угол между гранями SBA и SBC , если $SD=9$.

33.3. (ОБЗ) Основанием четырёхугольной пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, причём $AB=3\sqrt{2}$, $BC=6$. Основанием высоты пирамиды является центр прямоугольника. Из вершин A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB .

- Докажите, что P – середина отрезка BQ .
- Найдите угол между гранями SBA и SBC , если $SD=9$.

33.4. (ОБЗ) Основанием четырёхугольной пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, причём $AB=4$, $BC=4\sqrt{2}$. Основанием высоты пирамиды является центр прямоугольника. Из вершин A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB .

- Докажите, что P – середина отрезка BQ .
- Найдите угол между гранями SBA и SBC , если $SD=8$.

34.1. (Демо) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ через ребро AB провели плоскость α , образующую сечение $ABMN$, где точки M и N – точки пересечения плоскости α с боковыми рёбрами SC и SD соответственно. Известно, что $AB=BM=AN=5MN$.

- Докажите, что точки M и N делят рёбра SC и SD в отношении $1:4$, считая от вершины S .
- Найдите косинус угла между плоскостью основания $ABCD$ и плоскостью α .

34.2. (Демо) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ через ребро AB провели плоскость α , образующую сечение $ABMN$, где точки M и N – точки пересечения плоскости α с боковыми рёбрами SC и SD соответственно. Известно, что $AB=BM=AN=4MN$.

- Докажите, что точки M и N делят рёбра SC и SD в отношении $1:3$, считая от вершины S .
- Найдите косинус угла между плоскостью основания $ABCD$ и плоскостью α .

35.1. (ОБЗ) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 6 , а боковое ребро SA равно 7 . На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём $DN:NC=SK:KC=1:2$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой BC .

- Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA .
- Найдите угол между плоскостями α и SBC .

35.2. (ОБЗ) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём $DN:NC=SK:KC=1:3$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой BC .

- а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA .
- б) Найдите угол между плоскостями α и SBC .

36.1. (ОБЗ) Основанием четырёхугольной пирамиды $PABCD$ является трапеция $ABCD$, причём $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, K – точка пересечения прямых AB и CD .

- а) Докажите, что плоскости PAB и PCD перпендикулярны.
- б) Найдите объём пирамиды $KBCP$, если $AB=BC=CD=4$, а высота пирамиды $PABCD$ равна 9.

36.2. (ОБЗ) Основанием четырёхугольной пирамиды $PABCD$ является трапеция $ABCD$, причём $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, K – точка пересечения прямых AB и CD .

- а) Докажите, что плоскости PAB и PCD перпендикулярны.
- б) Найдите объём пирамиды $KBCP$, если $AB=BC=CD=2$, а высота пирамиды $PABCD$ равна 12.

37.1. (ОБЗ) В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC , равными 9 и 4 соответственно. Точки M и N лежат на рёбрах SD и BC соответственно, причём $SM:MD=2:3$, $BN:NC=1:3$.

Плоскость AMN пересекает ребро SC в точке K .

- а) Докажите, что $SK:KC=2:1$.
- б) Плоскость AMN делит пирамиду $SABCD$ на два многогранника. Найдите отношение их объёмов.

37.2. (ОБЗ) В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC , равными 8 и 3 соответственно. Точки M и N лежат на рёбрах SD и BC соответственно, причём $SM:MD=3:2$, $BN:NC=1:2$.

Плоскость AMN пересекает ребро SC в точке K .

- а) Докажите, что $SK:KC=6:1$.
- б) Плоскость AMN делит пирамиду $SABCD$ на два многогранника. Найдите отношение их объёмов.

38.1. На ребре SD правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ отмечена точка M , причём $SM:MD=2:1$. Точки P и Q – середины рёбер BC и AD соответственно.

- а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MPQ является равнобедренной трапецией.
- б) Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость MPQ разбивает пирамиду.

38.2. На ребре SD правильной четырёхугольной пирамиды SABCD с основанием ABCD отмечена точка M, причём $SM:MD=1:2$. Точки P и Q – середины рёбер BC и AD соответственно.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MPQ является равнобедренной трапецией.

б) Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость MPQ разбивает пирамиду.

39.1. (ОБЗ) Точка M – середина бокового ребра SC правильной четырёхугольной пирамиды SABCD. Точка N лежит на стороне основания BC. Плоскость α проходит через точки M и N параллельно боковому ребру SA.

а) Плоскость α пересекает боковое ребро SD в точке L. Докажите, что $BN:NC=DL:LS$.

б) Плоскость α делит пирамиду SABCD на два многогранника. Найдите отношение их объёмов, если $BN:NC=1:2$.

39.2. (ОБЗ) Точка M – середина бокового ребра SC правильной четырёхугольной пирамиды SABCD. Точка N лежит на стороне основания BC. Плоскость α проходит через точки M и N параллельно боковому ребру SA.

а) Плоскость α пересекает боковое ребро SD в точке L. Докажите, что $BN:NC=DL:LS$.

б) Плоскость α делит пирамиду SABCD на два многогранника. Найдите отношение их объёмов, если $BN:NC=1:3$.

40.1. (ОБЗ) В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD сторона основания $AB = 4$, а боковое ребро $SA = 7$. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM=SK=1$.

а) Докажите, что плоскость СКМ перпендикулярна плоскости ABC.

б) Найдите объём пирамиды ВСКМ.

40.2. (ОБЗ) В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD сторона основания $AB = 8$, а боковое ребро $SA = 7$. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM = 2$, $SK = 1$.

а) Докажите, что плоскость СКМ перпендикулярна плоскости ABC.

б) Найдите объём пирамиды ВСКМ.

VI) Треугольная пирамида

41.1. (ОБЗ) В пирамиде ABCD рёбра DA, DB и DC попарно перпендикулярны, а $AB=BC=AC=6\sqrt{2}$.

а) Докажите, что эта пирамида правильная.

б) На рёбрах DA и DC отмечены точки M и N соответственно, причём $DM:MA=DN:NC=1:2$. Найдите расстояние от точки D до плоскости MNB.

41.2. (ОБЗ) В пирамиде $ABCD$ рёбра DA , DB и DC попарно перпендикулярны, а $AB=BC=AC=8\sqrt{2}$.

а) Докажите, что эта пирамида правильная.

б) На рёбрах DA и DC отмечены точки M и N соответственно, причём $DM:MA=DN:NC=1:3$. Найдите расстояние от точки D до плоскости MNB .

42.1. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 60, а боковое ребро SA равно 37. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости α .

42.2. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 30, а боковое ребро SA равно 28. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости α .

43.1. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона AB основания равна 12, а высота пирамиды равна 1. На рёбрах AB , AC и AS отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM=AN=3$ и $AK=\frac{7}{4}$.

а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.

б) Найдите расстояние от точки M до плоскости SBC .

43.2. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона AB основания равна 6, а высота пирамиды равна 2. На рёбрах AB , AC и AS отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM=AN=2$ и $AK=\frac{4}{3}$.

а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.

б) Найдите расстояние от точки M до плоскости SBC .

44.1. (ОБЗ) На рёбрах AC , AD , BD и BC тетраэдра $ABCD$ отмечены точки K , L , M и N соответственно, причём $AK:KC=2:3$. Четырёхугольник $KLMN$ – квадрат со стороной 2.

а) Докажите, что прямые AB и CD перпендикулярны.

б) Найдите расстояние от вершины B до плоскости KLM , если объём тетраэдра $ABCD$ равен 25.

44.2. (ОБЗ) На рёбрах AC , AD , BD и BC тетраэдра $ABCD$ отмечены точки K , L , M и N соответственно, причём $AK:KC=3:7$. Четырёхугольник $KLMN$ – квадрат со стороной 3.

- а) Докажите, что прямые AB и CD перпендикулярны.
- б) Найдите расстояние от вершины B до плоскости KLM , если объём тетраэдра $ABCD$ равен 100.

45.1. (ОБЗ) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC точки M и K – середины рёбер AB и SC соответственно. На продолжении ребра SB за точку S отмечена точка R . Прямые RM и RK пересекают рёбра AS и BC в точках N и L соответственно, причём $BL=3LC$.

- а) Докажите, что отрезки MK и NL пересекаются.
- б) Найдите отношение $AN:NS$.

45.2. (ОБЗ) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC точки M и K – середины ребер AB и SC соответственно. На продолжении ребра SB за точку S отмечена точка R . Прямые RM и RK пересекают ребра AS и BC в точках N и L соответственно, причём $2BL = 3LC$.

- а) Докажите, что прямые MK и NL пересекаются.
- б) Найдите отношение $AN:NS$.

46.1. (ОБЗ) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC точки M и K – середины рёбер AB и SC соответственно, а точки N и L отмечены на рёбрах SA и BC соответственно так, что отрезки MK и NL пересекаются, а $AN=3NS$.

- а) Докажите, что прямые MN , KL и SB пересекаются в одной точке.
- б) Найдите отношение $BL:LC$.

46.2. (ОБЗ) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC точки K и M – середины рёбер AB и SC соответственно. Точки N и L на сторонах BC и SA соответственно расположены таким образом, что $AL=4LS$ и прямые NL и MK пересекаются.

- а) Докажите, что прямые LK , MN и BS пересекаются в одной точке.
- б) Найдите отношение $CN:NB$.

47.1. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 4. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .
- б) Найдите периметр многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α .

47.2. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 7. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .

б) Найдите периметр многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α .

48.1. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 13. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .

б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α .

48.2. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 24, а боковое ребро SA равно 19. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .

б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α .

49.1. (ОБЗ) В пирамиде $ABCD$ рёбра DA , DB и DC попарно перпендикулярны, а $AB=BC=AC=5\sqrt{2}$.

а) Докажите, что эта пирамида правильная.

б) На рёбрах DA и DC отмечены точки M и N соответственно, причём $DM:MA=DN:NC=2:3$. Найдите площадь сечения MNB .

49.2. (ОБЗ) В пирамиде $ABCD$ рёбра DA , DB и DC попарно перпендикулярны, а $AB=BC=AC=9\sqrt{2}$.

а) Докажите, что эта пирамида правильная.

б) На рёбрах DA и DC отмечены точки M и N соответственно, причём $DM:MA=DN:NC=2:7$. Найдите площадь сечения MNB .

50.1. (ОБЗ) В правильном тетраэдре $ABCD$ точки M и N – середины рёбер AB и CD соответственно. Плоскость α перпендикулярна прямой MN и пересекает ребро BC в точке K .

а) Докажите, что прямая MN перпендикулярна рёбрам AB и CD .

б) Найдите площадь сечения тетраэдра $ABCD$ плоскостью α , если известно, что $BK=1$, $KC=3$.

50.2. (ОБЗ) В правильном тетраэдре $ABCD$ точки M и N – середины рёбер AB и CD соответственно. Плоскость α перпендикулярна прямой MN и пересекает ребро BC в точке K .

а) Докажите, что прямая MN перпендикулярна рёбрам AB и CD .

б) Найдите площадь сечения тетраэдра $ABCD$ плоскостью α , если известно, что $BK=1$, $KC=5$.

51.1. (ОБЗ) В основании правильной треугольной пирамиды $ABCD$ лежит треугольник ABC со стороной, равной 6. Боковое ребро пирамиды равно 5. На ребре AD отмечена точка T так, что $AT:TD=2:1$. Через точку T параллельно прямым AC и BD проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение пирамиды указанной плоскостью является прямоугольником.

б) Найдите площадь сечения.

51.2. (ОБЗ) В основании правильной треугольной пирамиды $ABCD$ лежит треугольник ABC со стороной, равной 5. Боковое ребро пирамиды равно 9. На ребре AD отмечена точка T так, что $AT:TD=1:2$. Через точку T параллельно прямым AC и BD проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение пирамиды указанной плоскостью является прямоугольником.

б) Найдите площадь сечения.

52.1. (ОБЗ) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно $\sqrt{21}$. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM=4$, $SK:KB=1:3$.

а) Докажите, что плоскость $СКМ$ перпендикулярна плоскости ABC .

б) Найдите объём пирамиды $ВСКМ$.

52.2. (ОБЗ) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно $\sqrt{37}$. На рёбрах AB и SA отмечены точки M и K соответственно, причём $AM=2$, $SK:KB=1:3$.

а) Докажите, что плоскость $СКМ$ перпендикулярна плоскости ABC .

б) Найдите объём пирамиды $АСКМ$.

53.1. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 8. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C , а основанием – сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α .

53.2. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 30, а боковое ребро SA равно 28. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .
- Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C , а основанием – сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α .

54.1. (ОБЗ) На рёбрах AB и BC треугольной пирамиды $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно, причём $AM:MB=CN:NB=1:2$. Точки P и Q – середины рёбер DA и DC соответственно.

- Докажите, что точки P , Q , M и N лежат в одной плоскости.
- Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость PQM разбивает пирамиду.

54.2. (ОБЗ) На рёбрах AB и BC треугольной пирамиды $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно, причём $AM:MB=CN:NB=3:1$. Точки P и Q – середины рёбер DA и DC соответственно.

- Докажите, что точки P , Q , M и N лежат в одной плоскости.
- Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость PQM разбивает пирамиду.

VII) Шестиугольная пирамида

55.1. (ОБЗ) В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания AB равна 5, а боковое ребро SA равно 9. Точка M лежит на ребре AB , $AM=1$, а точка K лежит на ребре SC . Известно, что $MK=KD$.

- Докажите, что плоскость DKM перпендикулярна плоскости ABC .
- Найдите площадь треугольника DKM .

55.2. (ОБЗ) В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро SA равно 7. Точка M лежит на ребре AB , $AM=3$, а точка K лежит на ребре SC . Известно, что $MK=KD$.

- Докажите, что плоскость DKM перпендикулярна плоскости ABC .
- Найдите площадь треугольника DKM .

56.1. (ОБЗ) В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания AB равна 2, а боковое ребро SA равно 8. Точка M – середина ребра AB . Плоскость α перпендикулярна плоскости ABC и содержит точки M и D . Прямая SC пересекает плоскость α в точке K .

- Докажите, что $KM=KD$.
- Найдите объём пирамиды $CDKM$.

56.2. (ОБЗ) В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 9. Точка M – середина ребра AB . Плоскость α перпендикулярна плоскости ABC и содержит точки M и D . Прямая SC пересекает плоскость α в точке K .

а) Докажите, что $KM=KD$.

б) Найдите объём пирамиды $CDKM$.

VIII) Цилиндр и конус

57.1. (ОБЗ) В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B , а на окружности другого основания – точки B_1 и C_1 , причём BB_1 – образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.

б) Найдите расстояние от точки B до прямой AC_1 , если $AB=21$, $BB_1=12$, $B_1C_1=16$.

57.2. (ОБЗ) В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B , а на окружности другого основания – точки B_1 и C_1 , причём BB_1 – образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.

б) Найдите расстояние от точки B до прямой AC_1 , если $AB=15$, $BB_1=16$, $B_1C_1=12$.

58.1. (ОБЗ) В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A , B и C , а на окружности другого основания – точка C_1 , причём CC_1 – образующая цилиндра, а AC – диаметр основания. Известно, что $\angle ACB=45^\circ$, $AB=2\sqrt{3}$, $CC_1=2\sqrt{6}$.

а) Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен 60° .

б) Найдите расстояние от точки B до прямой AC_1 .

58.2. (ОБЗ) В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A , B и C , а на окружности другого основания – точка C_1 , причём CC_1 – образующая цилиндра, а AC – диаметр основания. Известно, что $\angle ACB=45^\circ$, $AB=3\sqrt{2}$, $CC_1=6$.

а) Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен 60° .

б) Найдите расстояние от точки B до прямой AC_1 .

59.1. (ОБЗ) В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки А и В, а на окружности другого основания – точки В₁ и С₁, причём ВВ₁ – образующая цилиндра, а отрезок АС₁ пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол АВС₁ прямой.

б) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если АВ=20, ВВ₁=15, В₁С₁=21.

59.2. (ОБЗ) В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки А и В, а на окружности другого основания – точки В₁ и С₁, причём ВВ₁ – образующая цилиндра, а отрезок АС₁ пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол АВС₁ прямой.

б) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если АВ=15, ВВ₁=21, В₁С₁=20.

60.1. (ОБЗ) В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки А, В и С, а на окружности другого основания – точка С₁, причём СС₁ – образующая цилиндра, а АС – диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 30^\circ$, АВ=1, $CC_1 = 2\sqrt{2}$.

а) Докажите, что угол между прямыми АС₁ и ВС равен 60°.

б) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

60.2. (ОБЗ) В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки А, В и С, а на окружности другого основания – точка С₁, причём СС₁ – образующая цилиндра, а АС – диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 30^\circ$, $AB = \sqrt{2}$, СС₁=4.

а) Докажите, что угол между прямыми АС₁ и ВС равен 60°.

б) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

61.1. (ОБЗ) В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки А и В, а на окружности другого основания – точки В₁ и С₁, причём ВВ₁ – образующая цилиндра, а отрезок АС₁ пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол АВС₁ прямой.

б) Найдите угол между прямыми ВВ₁ и АС₁, если АВ=6, ВВ₁=15, В₁С₁=8.

61.2. (ОБЗ) В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки А и В, а на окружности другого основания – точки В₁ и С₁, причём ВВ₁ – образующая цилиндра, а отрезок АС₁ пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол АВС₁ прямой.

б) Найдите угол между прямыми ВВ₁ и АС₁, если АВ=20, ВВ₁=15, В₁С₁=21.

62.1. (ОБЗ) В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки А и В, а на окружности другого основания – точки В₁ и С₁, причём ВВ₁ – образующая цилиндра, а отрезок АС₁ пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол АВС₁ прямой.

б) Найдите объём цилиндра, если АВ=7, ВВ₁=24, В₁С₁=10.

62.2. (ОБЗ) В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки А и В, а на окружности другого основания – точки В₁ и С₁, причём ВВ₁ – образующая цилиндра, а отрезок АС₁ пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол АВС₁ прямой.

б) Найдите объём цилиндра, если АВ=9, ВВ₁=12, В₁С₁=8.

63.1. (ОБЗ) В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки А, В и С, а на окружности другого основания – точка С₁, причём СС₁ – образующая цилиндра, а АС – диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 30^\circ$, $AB = \sqrt{2}$, $CC_1 = 2$.

а) Докажите, что угол между прямыми АС₁ и ВС равен 45° .

б) Найдите объём цилиндра.

63.2. (ОБЗ) В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки А, В и С, а на окружности другого основания – точка С₁, причём СС₁ – образующая цилиндра, а АС – диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 30^\circ$, $AB = \sqrt{6}$, $CC_1 = 2\sqrt{3}$.

а) Докажите, что угол между прямыми АС₁ и ВС равен 45° .

б) Найдите объём цилиндра.

64.1. Различные точки А, В и С лежат на окружности основания конуса с вершиной S так, что отрезок АВ является её диаметром. Угол между образующей конуса и плоскостью основания равен 60° .

а) Докажите, что $\cos \angle ASC + \cos \angle BSC = \frac{3}{2}$.

б) Найдите объём тетраэдра SABC, если SC=1, $\cos \angle ASC = \frac{2}{3}$.

64.2. Различные точки А, В и С лежат на окружности основания конуса с вершиной S так, что отрезок АВ является её диаметром. Угол между образующей конуса и плоскостью основания равен 60° .

а) Докажите, что $\cos \angle BSC + \cos \angle ASC = \frac{3}{2}$.

б) Найдите объём тетраэдра SABC, если SC=2, $\cos \angle ASC = \frac{3}{5}$.