

15. Неравенства

Блок 1. ФИПИ

I) Показательные неравенства

Задание 1. (ОБЗ) Решите неравенство:

1) $\frac{13}{3^x-81} \leq \frac{1}{3^x-9};$

5) $\frac{1}{3^x+21} + \frac{1}{3^x-27} \geq 0;$

9) $\frac{8^{x+1}-40}{2 \cdot 64^x-32} \leq 1;$

2) $\frac{6}{5^x-25} \leq \frac{1}{5^x-5};$

6) $\frac{1}{7^x+35} + \frac{1}{7^x-49} \geq 0;$

10) $\frac{4^{x+1}-10}{2 \cdot 16^x-8} \leq 1.$

3) $\frac{2}{3^x+27} \geq \frac{1}{3^x-27};$

7) $3^x + \frac{243}{3^x-84} \leq 0;$

4) $\frac{4}{2^x+32} \geq \frac{1}{2^x-16};$

8) $6^x + \frac{216}{6^x-42} \leq 0;$

Задание 2. Решите неравенство:

1) $\frac{2}{7^x-7} \geq \frac{5}{7^x-4};$

5) $\frac{3^x-1}{3^x-3} \leq 1 + \frac{1}{3^x-2};$

2) $\frac{4}{3^x-3} \geq \frac{5}{3^x-2};$

6) $\frac{6^x-1}{6^x-6} \leq 1 + \frac{3}{6^x-4};$

3) $\frac{1}{5^x+31} \leq \frac{4}{5^{x+1}-1};$

7) $\frac{4^x-2}{4^x-3} \leq 1 - \frac{1}{4^x-4};$

4) $\frac{1}{2^x+21} \leq \frac{3}{2^{x+2}-1};$

8) $\frac{5^x-4}{5^x-3} \leq 1 - \frac{3}{5^x-5}.$

Задание 3. (ОБЗ) Решите неравенство:

1) $\frac{15^x-3^{x+1}-5^{x+1}+15}{-x^2+2x} \geq 0;$

2) $\frac{14^x-7^{x+1}-2^{x+1}+14}{-x^2+4x} \geq 0.$

Задание 4. (ОБЗ, Демо) Решите неравенство:

1) $\frac{10^x-25 \cdot 2^x-2 \cdot 5^x+50}{5x-x^2-4} \geq 0;$

3) $\frac{27^x-9^{x+1}+3^{x+3}-27}{50x^2-110x+60,5} \geq 0;$

2) $\frac{12^x-16 \cdot 3^x-3 \cdot 4^x+48}{6x-x^2-5} \geq 0;$

4) $\frac{27^{x+1}-3 \cdot 9^{x+1}+3^{x+2}-1}{50x^2+50x+12,5} \geq 0.$

Задание 5. Решите неравенство:

$$1) \frac{6^x - 4 \cdot 3^x}{x \cdot 2^x - 5 \cdot 2^x - 4x + 20} \leq \frac{1}{x-5};$$

$$2) \frac{15^x - 9 \cdot 5^x}{x \cdot 3^x - 4 \cdot 3^x - 9x + 36} \leq \frac{1}{x-4}.$$

Задание 6. Решите неравенство:

$$1) \frac{13 - 5 \cdot 3^x}{9^x - 12 \cdot 3^x + 27} \geq 0,5;$$

$$5) \frac{6^x}{6^x - 7} + \frac{6^x + 9}{6^x - 6} + \frac{65}{36^x - 13 \cdot 6^x + 42} \leq 0;$$

$$2) \frac{31 - 7 \cdot 5^x}{25^x - 30 \cdot 5^x + 125} \geq 0,25;$$

$$6) \frac{5^x}{5^x - 4} + \frac{5^x + 5}{5^x - 5} + \frac{22}{25^x - 9 \cdot 5^x + 20} \leq 0;$$

$$3) \frac{7 - 2 \cdot 2^x}{4^x - 12 \cdot 2^x + 32} \geq 0,25;$$

$$7) \frac{2^x}{2^x - 3} + \frac{2^x + 1}{2^x - 2} + \frac{5}{4^x - 5 \cdot 2^x + 6} \leq 0;$$

$$4) \frac{31 - 5 \cdot 2^x}{4^x - 24 \cdot 2^x + 128} \geq 0,25;$$

$$8) \frac{3^x}{3^x - 3} + \frac{3^x + 1}{3^x - 2} + \frac{5}{9^x - 5 \cdot 3^x + 6} \leq 0.$$

Задание 7. (ОБЗ) Решите неравенство:

$$1) 12^x - 8^x - 2 \cdot 6^{x+1} + 3 \cdot 4^{x+1} + 32 \cdot 3^x - 2^{x+5} \leq 0;$$

$$2) 63^x - 27^x - 12 \cdot 21^x + 12 \cdot 9^x + 27 \cdot 7^x - 3^{x+3} \leq 0;$$

$$3) 45^x - 27^x - 18 \cdot 15^x + 2 \cdot 9^{x+1} + 81 \cdot 5^x - 3^{x+4} \leq 0;$$

$$4) 28^x - 8^x - 16 \cdot 14^x + 4^{x+2} + 64 \cdot 7^x - 2^{x+6} \leq 0;$$

$$5) 27 \cdot 45^x - 27^{x+1} - 12 \cdot 15^x + 12 \cdot 9^x + 5^x - 3^x \leq 0;$$

$$6) 2 \cdot 20^x - 2 \cdot 8^x - 17 \cdot 10^x + 17 \cdot 4^x + 8 \cdot 5^x - 2^{x+3} \leq 0.$$

Задание 8. (ОБЗ) Решите неравенство:

$$1) \frac{4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 4}{2^x - 5} + \frac{3 \cdot 2^{x+1} - 46}{2^x - 8} \leq 2^x + 5;$$

$$5) \frac{3^x + 9}{3^x - 9} + \frac{3^x - 9}{3^x + 9} \geq \frac{4 \cdot 3^{x+1} + 144}{9^x - 81};$$

$$2) \frac{49^x - 6 \cdot 7^x + 3}{7^x - 5} + \frac{6 \cdot 7^x - 39}{7^x - 7} \leq 7^x + 5;$$

$$6) \frac{2^x + 8}{2^x - 8} + \frac{2^x - 8}{2^x + 8} \geq \frac{2^{x+4} + 96}{4^x - 64};$$

$$3) \frac{4^x - 3 \cdot 2^{x+2} + 5}{2^x - 3} + \frac{3 \cdot 2^{x+2} - 4}{2^x - 4} \leq 2^x + 3;$$

$$7) \frac{2 \cdot 8^{x-1}}{2 \cdot 8^{x-1} - 1} \geq \frac{3}{8^x - 1} + \frac{8}{64^x - 5 \cdot 8^x + 4};$$

$$4) \frac{9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 4}{3^x - 5} + \frac{2 \cdot 3^{x+1} - 51}{3^x - 9} \leq 3^x + 5;$$

$$8) \frac{9^{x-1}}{9^{x-1} - 1} \geq \frac{5}{9^x - 1} + \frac{36}{81^x - 10 \cdot 9^x + 9}.$$

Задание 9. Решите неравенство:

$$1) \frac{4^x - 2^{x+3} + 7}{4^x - 5 \cdot 2^x + 4} \leq \frac{2^x - 9}{2^x - 4} + \frac{1}{2^x - 6}; \quad 2) \frac{9^x - 10 \cdot 3^x + 9}{9^x - 4 \cdot 3^x + 3} \leq \frac{3^x - 11}{3^x - 3} + \frac{1}{3^x - 5}.$$

Задание 10. Решите неравенство:

$$1) \frac{9^x - 3^x + 2}{9^x - 3^x} + \frac{5 \cdot 3^x - 19}{3^x - 4} \leq \frac{2 \cdot 3^{x+1} - 2}{3^x};$$
$$2) \frac{4^x - 2^x + 1}{4^x - 2^x} + \frac{2^{x+1} - 9}{2^x - 7} \leq \frac{3 \cdot 2^x - 1}{2^x};$$
$$3) \frac{25^x - 5^{x+2} + 26}{5^x - 1} + \frac{25^x - 7 \cdot 5^x + 1}{5^x - 7} \leq 2 \cdot 5^x - 24;$$
$$4) \frac{4^x + 2^{x+1} - 36}{2^x - 5} + \frac{4^{x+1} - 2^{x+5} + 4}{2^x - 8} \leq 5 \cdot 2^x + 7.$$

Задание 11. Решите неравенство:

$$1) 125^x - 25^x + \frac{4 \cdot 25^x - 20}{5^x - 5} \leq 4; \quad 2) 8^x - 3 \cdot 4^x + \frac{9 \cdot 4^x - 288}{2^x - 9} \leq 32.$$

Задание 12. (ОБЗ) Решите неравенство:

$$1) 2^x - 6 - \frac{9 \cdot 2^x - 37}{4^x - 7 \cdot 2^x + 12} \leq \frac{1}{2^x - 4}; \quad 3) 11^x - 6 - \frac{24 \cdot 11^x - 244}{121^x - 16 \cdot 11^x + 60} \leq \frac{1}{11^x - 10};$$
$$2) 5^x - 24 - \frac{22 \cdot 5^x - 113}{25^x - 7 \cdot 5^x + 10} \leq \frac{1}{5^x - 5}; \quad 4) 3^x - 8 - \frac{2 \cdot 3^{x+1} - 19}{9^x - 5 \cdot 3^x + 6} \leq \frac{1}{3^x - 3}.$$

Задание 13. (ОБЗ) Решите неравенство:

$$1) \frac{8^{x+\frac{2}{3}} - 9 \cdot 4^{x+\frac{1}{2}} + 13 \cdot 2^x - 13}{4^{x+\frac{1}{2}} - 9 \cdot 2^x + 4} \leq 2^{x+1} - \frac{1}{2^x - 2} + \frac{3}{2^{x+1} - 1};$$
$$2) \frac{27^{x+\frac{1}{3}} - 10 \cdot 9^x + 10 \cdot 3^x - 5}{9^{x+\frac{1}{2}} - 10 \cdot 3^x + 3} \leq 3^x + \frac{1}{3^x - 2} + \frac{1}{3^{x+1} - 1}.$$

Задание 14. Решите неравенство:

$$1) \frac{3}{(2^{2-x^2}-1)^2} - \frac{4}{2^{2-x^2}-1} + 1 \geq 0;$$

$$3) \frac{15}{(4^{2-x^2}-1)^2} - \frac{16}{4^{2-x^2}-1} + 1 \geq 0;$$

$$2) \frac{16}{(3^{2-x^2}-1)^2} - \frac{10}{3^{2-x^2}-1} + 1 \geq 0;$$

$$4) \frac{105}{(2^{4-x^2}-1)^2} - \frac{22}{2^{4-x^2}-1} + 1 \geq 0.$$

II) Логарифмические неравенства

Задание 15. (ОБЗ) Решите неравенство:

$$1) \log_2^2(x^2-9) - 9\log_2(x^2-9) + 20 \geq 0;$$

$$3) \log_5^2(25-x^2) - 3\log_5(25-x^2) + 2 \geq 0;$$

$$2) \log_3^2(x^2-16) - 5\log_3(x^2-16) + 6 \geq 0;$$

$$4) \log_3^2(81-x^2) - 7\log_3(81-x^2) + 12 \geq 0;$$

$$5) \log_4^2(64-x^2) - 5\log_4(64-x^2) + 6 \geq 0;$$

$$6) \log_7^2(49-x^2) - 3\log_7(49-x^2) + 2 \geq 0.$$

Задание 16. Решите неравенство:

$$1) (\log_2^2 x - 2\log_2 x)^2 + 36\log_2 x + 45 < 18\log_2^2 x;$$

$$2) (\log_2^2 x - 2\log_2 x)^2 + 22\log_2 x + 24 < 11\log_2^2 x.$$

Задание 17. (ОБЗ) Решите неравенство:

$$1) \log_3((2-x)(x^2+5)) \geq \log_3(x^2-5x+6) + \log_3(4-x);$$

$$2) \log_5((3-x)(x^2+2)) \geq \log_5(x^2-7x+12) + \log_5(5-x);$$

$$3) \log_5\left(\frac{2}{x}+2\right) - \log_5(x+3) \leq \log_5\left(\frac{x+6}{x^2}\right);$$

$$4) \log_3\left(\frac{1}{x}+2\right) - \log_3(x+5) \leq \log_3\left(\frac{x+4}{x^2}\right);$$

$$5) \log_7(2x^2+12) - \log_7(x^2-x+12) \geq \log_7\left(2-\frac{1}{x}\right);$$

$$6) \log_3(x^2+2) - \log_3(x^2-x+12) \geq \log_3\left(1-\frac{1}{x}\right).$$

Задание 18. (ОБЗ) Решите неравенство:

$$1) \log_5(3x+1) + \log_5\left(\frac{1}{72x^2} + 1\right) \geq \log_5\left(\frac{1}{24x} + 1\right);$$

$$2) \log_3(2x+1) + \log_3\left(\frac{1}{32x^2} + 1\right) \geq \log_3\left(\frac{1}{16x} + 1\right);$$

$$3) \log_{15}(2x^2+1) + \log_{15}\left(\frac{1}{4x} + 1\right) \geq \log_{15}\left(\frac{x}{2} + 1\right);$$

$$4) \log_{11}(2x^2+1) + \log_{11}\left(\frac{1}{32x} + 1\right) \geq \log_{11}\left(\frac{x}{16} + 1\right).$$

Задание 19. (ОБЗ) Решите неравенство:

$$1) \log_2(4x^2-1) - \log_2 x \leq \log_2\left(5x + \frac{9}{x} - 11\right);$$

$$2) \log_5(4x^2-9) - \log_5 x \leq \log_5\left(5x + \frac{5}{x} - 9\right).$$

$$3) \log_{11}(8x^2+7) - \log_{11}(x^2+x+1) \geq \log_{11}\left(\frac{x}{x+5} + 7\right);$$

$$4) \log_7(11x^2+10) - \log_7(x^2+x+1) \geq \log_7\left(\frac{x}{x+8} + 10\right);$$

$$5) 2\log_2(x\sqrt{5}) - \log_2\left(\frac{x}{1-x}\right) \leq \log_2\left(5x^2 + \frac{1}{x} - 2\right);$$

$$6) 2\log_7(x\sqrt{2}) - \log_7\left(\frac{x}{1-x}\right) \leq \log_7\left(8x^2 + \frac{1}{x} - 5\right);$$

$$7) \frac{\log_2(2-x) - \log_2(x+1)}{\log_2^2 x^2 + \log_2 x^4 + 1} \geq 0;$$

$$9) 9\log_{12}(x^2-3x-4) \leq 10 + \log_{12} \frac{(x+1)^9}{x-4};$$

$$8) \frac{\log_3(3-x) - \log_3(x+2)}{\log_3^2 x^2 + \log_3 x^4 + 1} \geq 0;$$

$$10) 11\log_{11}(x^2+x-20) \leq 12 + \log_{11} \frac{(x+5)^{11}}{x-4};$$

$$11) 3\log_6(x^2+6x-7) \leq 4 + \log_6 \frac{(x-1)^3}{x+7};$$

$$12) 7\log_{12}(x^2-13x+42) \leq 8 + \log_{12} \frac{(x-7)^7}{x-6}.$$

Задание 20. Решите неравенство:

$$1) \frac{2\log_9(x^2+4x)}{\log_9 x^2} \leq 1;$$

$$2) \frac{2\log_5(x^2-5x)}{\log_5 x^2} \leq 1.$$

Задание 21. Решите неравенство:

$$1) \log_2^2(8+2x-x^2)+9\log_{0,5}(8+2x-x^2)+18 > 0;$$

$$2) \log_2^2(16+6x-x^2)+10\log_{0,5}(16+6x-x^2)+24 > 0;$$

$$3) \log_2^2(4+3x-x^2)+7\log_{0,5}(4+3x-x^2)+10 > 0;$$

$$4) \log_5^2(5+4x-x^2)+4\log_{0,2}(5+4x-x^2)+3 > 0.$$

Задание 22. (ОБЗ) Решите неравенство:

$$1) (\log_{0,25}^2(x+3)-\log_4(x^2+6x+9)+1) \cdot \log_4(x+2) \leq 0;$$

$$2) (\log_{0,2}^2(x+2)-\log_5(x^2+4x+4)+1) \cdot \log_5(x+1) \leq 0.$$

$$3) \log_{0,5}(x^3-3x^2-9x+27) \leq \log_{0,25}(x-3)^4;$$

$$4) \log_{0,1}(x^3-5x^2-25x+125) \leq \log_{0,01}(x-5)^4;$$

$$5) \log_{0,2}(x^3-2x^2-4x+8) \leq \log_{0,04}(x-2)^4;$$

$$6) \log_{0,3}(x^3-4x^2-16x+64) \leq \log_{0,09}(x-4)^4;$$

$$7) \log_8(x^3-3x^2+3x-1) \geq \log_2(x^2-1)-5;$$

$$8) \log_{27}(x^3-9x^2+27x-27) \geq \log_3(x^2-9)-4;$$

$$9) \log_4((x-5)(x^2-2x-15))+1 \geq 0,5\log_2(x-5)^2;$$

$$10) \log_{100}((x-2)(x^2+5x-14))+1 \geq 0,5\lg(x-2)^2.$$

Задание 23. (ОБЗ) Решите неравенство:

1) $x^2 \log_{512}(x+7) \leq \log_2(x^2+14x+49);$

3) $x^2 \log_{625}(6-x) \leq \log_5(x^2-12x+36);$

2) $x^2 \log_{343}(x+3) \leq \log_7(x^2+6x+9);$

4) $x^2 \log_{512}(4-x) \geq \log_2(x^2-8x+16);$

5) $x^2 \log_{625}(-2-x) \geq \log_5(x^2+4x+4);$

6) $x^2 \log_{81}(-1-x) \geq \log_3(x^2+2x+1).$

Задание 24. (ОБЗ) Решите неравенство:

1) $\frac{\log_4(16x^4)+11}{\log_4^2 x-9} \geq -1;$

3) $\frac{\log_3(9x)-13}{\log_3^2 x+\log_3 x^4} \leq 1;$

2) $\frac{\log_2(4x^2)+35}{\log_2^2 x-36} \geq -1;$

4) $\frac{\log_7(49x)-3}{\log_7^2 x+\log_7 x^2} \leq 1.$

Задание 25. (ОБЗ) Решите неравенство:

1) $\frac{\log_4(64x)}{\log_4 x-3} + \frac{\log_4 x-3}{\log_4(64x)} \geq \frac{\log_4 x^4+16}{\log_4^2 x-9};$

2) $\frac{\log_2(32x)}{\log_2 x-5} + \frac{\log_2 x-5}{\log_2(32x)} \geq \frac{\log_2 x^{16}+18}{\log_2^2 x-25};$

3) $\frac{\log_5(25x)}{\log_5 x-2} + \frac{\log_5 x-2}{\log_5(25x)} \geq \frac{6-\log_5 x^4}{\log_5^2 x-4};$

4) $\frac{\log_3(81x)}{\log_3 x-4} + \frac{\log_3 x-4}{\log_3(81x)} \geq \frac{24-\log_3 x^8}{\log_3^2 x-16}.$

Задание 26. (ОБЗ) Решите неравенство:

1) $\frac{\log_8 x}{\log_8 \left(\frac{x}{64}\right)} \geq \frac{2}{\log_8 x} + \frac{3}{\log_8^2 x - \log_8 x^2};$

2) $\frac{\log_3 x}{\log_3 \left(\frac{x}{27}\right)} \geq \frac{2}{\log_3 x} + \frac{5}{\log_3^2 x - \log_3 x^3}.$

Задание 27. (ОБЗ) Решите неравенство:

$$1) 1 + \frac{5}{\log_4 x - 3} + \frac{6}{\log_4^2 x - \log_4(64x^6) + 12} \geq 0;$$

$$2) 1 + \frac{10}{\log_2 x - 5} + \frac{16}{\log_2^2 x - \log_2(32x^{10}) + 30} \geq 0.$$

Задание 28. Решите неравенство:

$$1) (2 - 3x) \cdot \log_{2x-1}(x^2 - 2x + 2) \leq 0;$$

$$3) (3x + 10) \cdot \log_{2x+7}(x^2 + 6x + 10) \geq 0;$$

$$2) (20 - 11x) \cdot \log_{5x-9}(x^2 - 4x + 5) \leq 0;$$

$$4) (4x + 9) \cdot \log_{2x+5}(x^2 + 4x + 5) \geq 0.$$

Задание 29. (ОБЗ) Решите неравенство:

$$1) \log_{49}(x+4) + \log_{(x^2+8x+16)} \sqrt{7} \leq -\frac{3}{4};$$

$$3) \log_{16}(x+5) + \log_{(x^2+10x+25)} 2 \geq \frac{3}{4};$$

$$2) \log_{25}(x+3) + \log_{(x^2+6x+9)} \sqrt{5} \leq -\frac{3}{4};$$

$$4) \log_{81}(x+6) + \log_{(x^2+12x+36)} 3 \geq \frac{3}{4}.$$

Задание 30. Решите неравенство:

$$1) \frac{\log_2(8x) \cdot \log_3(27x)}{x^2 - |x|} \leq 0;$$

$$3) \frac{\log_2(x^2) - \log_3(x^2)}{\log_6^2(2x^2 - 10x + 12,5) + 1} \geq 0;$$

$$2) \frac{\log_3(9x) \cdot \log_4(64x)}{5x^2 - |x|} \leq 0;$$

$$4) \frac{\log_3(x^2) - \log_5(x^2)}{\log_7^2(2x^2 - 6x + 4,5) + 1} \geq 0.$$

Задание 31. (Демо) Решите неравенство:

$$1) \frac{\log_2(2-x) - \log_2(x+1)}{\log_2^2 x^2 + \log_2 x^4 + 1} \geq 0;$$

$$2) \frac{\log_3(3-x) - \log_3(3x+2)}{\log_3^2 x^2 + 2\log_3 x^4 + 4} \geq 0.$$

Задание 32. Решите неравенство:

$$1) \frac{\log_x(2x^{-1}) \cdot \log_x(2x^2)}{\log_{(2x)} x \cdot \log_{(2x^{-2})} x} < 40;$$

$$2) \frac{\log_x(5x^{-1}) \cdot \log_x(5x^3)}{\log_{(5x)} x \cdot \log_{(5x^{-3})} x} < 105.$$