

17. Планиметрическая задача

Блок 1. ФИПИ

1) Треугольник

1.1. В треугольнике ABC угол ABC равен 60° . Окружность, вписанная в треугольник, касается стороны AC в точке M.

а) Докажите, что отрезок BM не больше утроенного радиуса вписанной в треугольник окружности.

б) Найдите $\sin \angle BMC$, если известно, что отрезок BM в 2,5 раза больше радиуса вписанной в треугольник окружности.

1.2. В треугольнике ABC угол ABC равен 60° . Окружность, вписанная в треугольник, касается стороны AC в точке M.

а) Докажите, что отрезок BM не больше утроенного радиуса вписанной в треугольник окружности.

б) Найдите $\sin \angle BMC$, если известно, что отрезок BM в 2,8 раза больше радиуса вписанной в треугольник окружности.

2.1. (ОБЗ) В треугольнике ABC точки A_1 , B_1 и C_1 – середины сторон BC, AC и AB соответственно, AH – высота, $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle BCA = 45^\circ$.

а) Докажите, что точки A_1 , B_1 , C_1 и H лежат на одной окружности.

б) Найдите A_1H , если $BC = 2\sqrt{3}$.

2.2. (ОБЗ) В треугольнике ABC точки A_1 , B_1 и C_1 – середины сторон BC, AC и AB соответственно, AH – высота, $\angle BAC = 120^\circ$, $\angle BCA = 15^\circ$.

а) Докажите, что точки A_1 , B_1 , C_1 и H лежат на одной окружности.

б) Найдите A_1H , если $BC = 4\sqrt{3}$.

2.3. (ОБЗ) В треугольнике ABC точки A_1 , B_1 и C_1 – середины сторон BC, AC и AB соответственно, AH – высота, $\angle BAC = 30^\circ$, $\angle BCA = 45^\circ$.

а) Докажите, что точки A_1 , B_1 , C_1 и H лежат на одной окружности.

б) Найдите A_1H , если $BC = 4\sqrt{3}$.

2.4. (ОБЗ) В треугольнике ABC точки A_1 , B_1 и C_1 – середины сторон BC, AC и AB соответственно, AH – высота, $\angle BAC = 120^\circ$, $\angle BCA = 45^\circ$.

а) Докажите, что точки A_1 , B_1 , C_1 и H лежат на одной окружности.

б) Найдите A_1H , если $BC = 6\sqrt{3}$.

3.1. (ОБЗ) Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно.

а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1

б) Вычислите длину стороны B_1C_1 и радиус данной окружности, если $\angle A = 120^\circ$, $BC = 10\sqrt{7}$ и площадь треугольника AB_1C_1 в три раза меньше площади четырехугольника BCB_1C_1 .

3.2. (ОБЗ) Окружность проходит через вершины В и С треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно.

- а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1
- б) Вычислите длину стороны B_1C_1 и радиус данной окружности, если $\angle A = 150^\circ$, $BC = 5\sqrt{5}$ и площадь треугольника AB_1C_1 в четыре раза меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1 .

3.3. (ОБЗ) Окружность проходит через вершины В и С треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно.

- а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1 .
- б) Вычислите длину стороны BC и радиус данной окружности, если $\angle A = 45^\circ$, $B_1C_1 = 6$ и площадь треугольника AB_1C_1 в восемь раз меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1 .

3.4. (ОБЗ) Окружность проходит через вершины В и С треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно.

- а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1 .
- б) Вычислите длину стороны BC и радиус данной окружности, если $\angle A = 30^\circ$, $B_1C_1 = 5$ и площадь треугольника AB_1C_1 в пять раз меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1 .

4.1. (ОБЗ) На стороне BC треугольника ABC отмечена точка D так, что $AB = BD$. Биссектриса BF треугольника ABC пересекает прямую AD в точке E. Из точки C на прямую AD опущен перпендикуляр СК.

- а) Докажите, что $AB:BC = AE:EK$.
- б) Найдите отношение площади треугольника ABE к площади четырёхугольника CDEF, если $BD:DC = 5:2$.

4.2. (ОБЗ) На стороне BC треугольника ABC отмечена точка D так, что $AB = BD$. Биссектриса BF треугольника ABC пересекает прямую AD в точке E. Из точки C на прямую AD опущен перпендикуляр СК.

- а) Докажите, что $AB:BC = AE:EK$.
- б) Найдите отношение площади треугольника ABE к площади четырёхугольника CDEF, если $BD:DC = 3:2$.

5.1. (ОБЗ) На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC отмечены точки C_1 , A_1 и B_1 соответственно, причём $AC_1:C_1B = 8:3$, $BA_1:A_1C = 1:2$, $AB_1:B_1C = 1:3$. Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке D.

- а) Докажите, что четырёхугольник ADA_1B_1 – параллелограмм.
- б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если отрезки AD и BC перпендикулярны, $AC = 16$, $BC = 15$.

5.2. (ОБЗ) На сторонах АВ, ВС и АС треугольника АВС отмечены точки C_1 , A_1 и B_1 соответственно, причём $AC_1:C_1B=7:12$, $BA_1:A_1C=3:1$, $AB_1:B_1C=3:4$. Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке D.

а) Докажите, что четырёхугольник ADA_1B_1 – параллелограмм.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника АВС, если отрезки AD и BC перпендикулярны, $AC=28$, $BC=16$.

6.1. (ОБЗ) Прямая, проходящая через середину М гипотенузы АВ прямоугольного треугольника АВС, перпендикулярна СМ и пересекает катет АС в точке К. При этом $AK:KC=1:2$.

а) Докажите, что $\angle BAC=30^\circ$.

б) Пусть прямые МК и ВС пересекаются в точке Р, а прямые АР и ВК – в точке Q. Найдите KQ, если $BC=\sqrt{21}$.

6.2. (ОБЗ) Прямая, проходящая через середину М гипотенузы АВ прямоугольного треугольника АВС, перпендикулярна СМ и пересекает катет АС в точке К. При этом $AK:KC=1:2$.

а) Докажите, что $\angle BAC=30^\circ$.

б) Пусть прямые МК и ВС пересекаются в точке Р, а прямые АР и ВК – в точке Q. Найдите KQ, если $BC=2\sqrt{3}$.

7.1. Дан прямоугольный треугольник АВС с прямым углом С. На катете АС взята точка М. Окружность с центром О и диаметром СМ касается гипотенузы в точке N.

а) Докажите, что прямые MN и ВО параллельны.

б) Найдите площадь четырёхугольника BOMN, если $CN=4$ и $AM:MC=1:3$.

7.2. Дан прямоугольный треугольник АВС с прямым углом С. На катете АС взята точка М. Окружность с центром О и диаметром СМ касается гипотенузы в точке N.

а) Докажите, что прямые MN и ВО параллельны.

б) Найдите площадь четырёхугольника BOMN, если $CN=8$ и $AM:MC=1:3$.

8.1. (ОБЗ) На сторонах АВ, ВС и АС треугольника АВС отмечены точки C_1 , A_1 и B_1 соответственно, причём $AC_1:C_1B=8:3$, $BA_1:A_1C=1:2$, $AB_1:B_1C=1:3$. Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке D.

а) Докажите, что четырёхугольник ADA_1B_1 – параллелограмм.

б) Найдите CD, если отрезки AD и BC перпендикулярны, $AC=28$, $BC=18$.

8.2. (ОБЗ) На сторонах АВ, ВС и АС треугольника АВС отмечены точки C_1 , A_1 и B_1 соответственно, причём $AC_1:C_1B=21:10$, $BA_1:A_1C=2:3$, $AB_1:B_1C=2:5$. Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке D.

а) Докажите, что четырёхугольник ADA_1B_1 – параллелограмм.

б) Найдите CD, если отрезки AD и BC перпендикулярны, $AC=63$, $BC=25$.

9.1. (ОБЗ) Прямая, проходящая через вершину В прямоугольника ABCD перпендикулярно диагонали AC, пересекает сторону AD в точке М, равноудалённой от вершин В и D.

а) Докажите, что $\angle ABM = \angle DBC = 30^\circ$.

б) Найдите расстояние от центра прямоугольника до прямой CM, если $BC=9$.

9.2. (ОБЗ) Прямая, проходящая через вершину В прямоугольника ABCD перпендикулярно диагонали AC, пересекает сторону AD в точке М, равноудалённой от вершин В и D.

а) Докажите, что $\angle ABM = \angle DBC = 30^\circ$.

б) Найдите расстояние от центра прямоугольника до прямой CM, если $BC = 6\sqrt{21}$.

10.1. Точка О – центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, I – центр вписанной в него окружности, Н – точка пересечения высот. Известно, что $\angle BAC = \angle OBC + \angle OCB$.

а) Докажите, что точка Н лежит на окружности, описанной около треугольника BOC.

б) Найдите угол ONI, если $\angle ABC = 40^\circ$.

10.2. Точка О – центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, I – центр вписанной в него окружности, Н – точка пересечения высот. Известно, что $\angle BAC = \angle OBC + \angle OCB$.

а) Докажите, что точка Н лежит на окружности, описанной около треугольника BOC.

б) Найдите угол ONI, если $\angle ABC = 70^\circ$.

11.1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты АК и CM. На них из точек М и К опущены перпендикуляры МЕ и КН соответственно.

а) Докажите, что прямые ЕН и AC параллельны.

б) Найдите отношение ЕН к AC, если $\angle ABC = 30^\circ$.

11.2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты АК и CM. На них из точек М и К опущены перпендикуляры МЕ и КН соответственно.

а) Докажите, что прямые ЕН и AC параллельны.

б) Найдите отношение ЕН к AC, если $\angle ABC = 60^\circ$.

12.1. (ОБЗ) В прямоугольном треугольнике ABC точка М лежит на катете AC, а точка N лежит на продолжении катета BC за точку C, причём $CM=BC$ и $CN=AC$.

а) Отрезки CP и CQ – медианы треугольников ABC и NCM соответственно. Докажите, что прямые CP и CQ перпендикулярны.

б) Прямые MN и AB пересекаются в точке К, а прямые BM и AN – в точке L. Найдите KL, если $BC=1$, а $AC=5$.

12.2. (ОБЗ) В прямоугольном треугольнике ABC точка M лежит на катете AC , а точка N лежит на продолжении катета BC за точку C , причём $CM=BC$ и $CN=AC$.

а) Отрезки CP и CQ – медианы треугольников ABC и NCM соответственно. Докажите, что прямые CP и CQ перпендикулярны.

б) Прямые MN и AB пересекаются в точке K , а прямые BM и AN – в точке L . Найдите KL , если $BC=3$, а $AC=5$.

13.1. (ОБЗ) Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H .

а) Докажите, что $\angle BB_1C_1 = \angle BAN$.

б) Найдите расстояние от центра окружности, описанной около треугольника ABC , до стороны BC , если $B_1C_1=18$ и $\angle BAC=30^\circ$.

13.2. (ОБЗ) Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H .

а) Докажите, что $\angle BB_1C_1 = \angle BAN$.

б) Найдите расстояние от центра окружности, описанной около треугольника ABC , до стороны BC , если $B_1C_1=9\sqrt{3}$ и $\angle BAC=30^\circ$.

13.3. (ОБЗ) Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H .

а) Докажите, что $\angle BB_1C_1 = \angle BAN$.

б) Найдите расстояние от центра окружности, описанной около треугольника ABC , до стороны BC , если $B_1C_1=10\sqrt{3}$ и $\angle BAC=60^\circ$.

13.4. (ОБЗ) Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H .

а) Докажите, что $\angle BB_1C_1 = \angle BAN$.

б) Найдите расстояние от центра окружности, описанной около треугольника ABC , до стороны BC , если $B_1C_1=9$ и $\angle BAC=60^\circ$.

14.1. (ОБЗ) В треугольнике ABC продолжения высоты CC_1 и биссектрисы BB_1 пересекают описанную окружность в точках N и M соответственно, $\angle ABC=40^\circ$, $\angle ACB=85^\circ$.

а) Докажите, что $BM=CN$.

б) Прямые BC и MN пересекаются в точке D . Найдите площадь треугольника BDN , если его высота BH равна 6.

14.2. (ОБЗ) В треугольнике ABC продолжения высоты CC_1 и биссектрисы BB_1 пересекают описанную окружность в точках N и M соответственно, $\angle ACB=85^\circ$, $\angle ABC=40^\circ$.

а) Докажите, что $BM=CN$.

б) Прямые BC и MN пересекаются в точке D . Найдите площадь треугольника BDN , если его высота BH равна 7.

15.1. (ОБЗ) На стороне AC равностороннего треугольника ABC отмечена точка M . Серединный перпендикуляр к отрезку BM пересекает стороны AB и BC в точках E и K соответственно.

а) Докажите, что $\angle AEM = \angle CMK$.

б) Найдите отношение площадей треугольников AEM и CMK , если $AM:MC=1:4$.

15.2. (ОБЗ) На стороне AC равностороннего треугольника ABC отмечена точка M . Серединный перпендикуляр к отрезку BM пересекает стороны AB и BC в точках E и K соответственно.

а) Докажите, что $\angle AEM = \angle CMK$.

б) Найдите отношение площадей треугольников AEM и CMK , если $AM:MC=1:5$.

16.1. В равнобедренном тупоугольном треугольнике ABC на продолжении боковой стороны BC опущена высота AN . Из точки N на сторону AB и основание AC опущены перпендикуляры NK и NM соответственно.

а) Докажите, что отрезки AM и MK равны.

б) Найдите MK , если $AB=5$, $AC=8$.

16.2. В равнобедренном тупоугольном треугольнике ABC на продолжении боковой стороны BC опущена высота AN . Из точки N на сторону AB и основание AC опущены перпендикуляры NK и NM соответственно.

а) Докажите, что отрезки AM и MK равны.

б) Найдите MK , если $AB=10$, $AC=12$.

17.1. (ОБЗ) В треугольнике ABC угол A равен 120° . Прямые, содержащие высоты BM и CN треугольника ABC , пересекаются в точке H . Точка O – центр окружности, описанной около треугольника ABC .

а) Докажите, что $AN=AO$.

б) Найдите площадь треугольника AHO , если $BC=\sqrt{15}$, $\angle ABC=45^\circ$.

17.2. (ОБЗ) В треугольнике ABC угол A равен 120° . Прямые, содержащие высоты BM и CN треугольника ABC , пересекаются в точке H . Точка O – центр окружности, описанной около треугольника ABC .

а) Докажите, что $AN=AO$.

б) Найдите площадь треугольника AHO , если $BC=3$, $\angle ABC=15^\circ$.

18.1. (ОБЗ) На стороне AC равностороннего треугольника ABC отмечена точка M . Серединный перпендикуляр к отрезку BM пересекает стороны AB и BC в точках E и K соответственно.

а) Докажите, что треугольники AEM и CMK подобны.

б) Найдите отношение $AM:MC$, если площади треугольников AEM и CMK равны 4 и 9 соответственно.

18.2. (ОБЗ) На стороне AC равностороннего треугольника ABC отмечена точка M . Серединный перпендикуляр к отрезку BM пересекает стороны AB и BC в точках E и K соответственно.

а) Докажите, что треугольники AEM и CMK подобны.

б) Найдите отношение $AM:MC$, если площади треугольников AEM и CMK равны 64 и 49 соответственно.

19.1. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H .

а) Докажите, что $\angle AHB_1 = \angle ACB$.

б) Найдите BC , если $AH = 10\sqrt{3}$ и $\angle BAC = 30^\circ$.

19.2. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H .

а) Докажите, что $\angle AHB_1 = \angle ACB$.

б) Найдите BC , если $AH = 8\sqrt{3}$ и $\angle BAC = 60^\circ$.

20.1. (ОБЗ) В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H . Через точку C_1 параллельно высоте BB_1 проведена прямая, пересекающая высоту AA_1 в точке K .

а) Докажите, что $AB \cdot KH = BC \cdot C_1H$.

б) Найдите отношение площадей треугольников C_1HK и ABC , если $AB=4$, $BC=5$, $AC=\sqrt{17}$.

20.2. (ОБЗ) В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H . Через точку C_1 параллельно высоте BB_1 проведена прямая, пересекающая высоту AA_1 в точке K .

а) Докажите, что $AB \cdot KH = BC \cdot C_1H$.

б) Найдите отношение площадей треугольников C_1HK и ABC , если $AB=6$, $BC=4$, $AC=5$.

21.1. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту BH . Из точки H на стороны AB и BC опустили перпендикуляры NK и NM соответственно.

а) Докажите, что треугольник MBK подобен треугольнику ABC .

б) Найдите отношение площади треугольника MBK к площади четырёхугольника $AKMC$, если $BH=2$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 3.

21.2. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту BH . Из точки H на стороны AB и BC опустили перпендикуляры NK и NM соответственно.

а) Докажите, что треугольник MBK подобен треугольнику ABC .

б) Найдите отношение площади треугольника MBK к площади четырёхугольника $AKMC$, если $BH=1$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 3.

21.3. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту BH . Из точки H на стороны AB и BC опустили перпендикуляры NK и NM соответственно.

- а) Докажите, что треугольник MBK подобен треугольнику ABC .
- б) Найдите отношение площади треугольника MBK к площади четырёхугольника $AKMC$, если $BH=3$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 4.

21.4. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту BH . Из точки H на стороны AB и BC опустили перпендикуляры NK и NM соответственно.

- а) Докажите, что треугольник MBK подобен треугольнику ABC .
- б) Найдите отношение площади треугольника MBK к площади четырёхугольника $AKMC$, если $BH=4$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 5.

22.1. Около остроугольного треугольника ABC описана окружность с центром O . На продолжении отрезка AO за точку O отмечена точка K так, что $\angle BAC + \angle AKC = 90^\circ$.

- а) Докажите, что четырёхугольник $OBKC$ вписанный.
- б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника $OBKC$, если $\cos \angle BAC = \frac{3}{5}$, а $BC=48$.

22.2. Около остроугольного треугольника ABC описана окружность с центром O . На продолжении отрезка AO за точку O отмечена точка K так, что $\angle BAC + \angle AKC = 90^\circ$.

- а) Докажите, что четырёхугольник $OBKC$ вписанный.
- б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника $OBKC$, если $\cos \angle BAC = \frac{4}{5}$, а $BC=96$.

22.3. Около остроугольного треугольника ABC описана окружность с центром O . На продолжении отрезка AO за точку O отмечена точка K так, что $\angle BAC + \angle AKC = 90^\circ$.

- а) Докажите, что четырёхугольник $OBKC$ вписанный.
- б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника $OBKC$, если $\cos \angle BAC = \frac{5}{13}$, а $BC=72$.

22.4. Около остроугольного треугольника ABC описана окружность с центром O . На продолжении отрезка AO за точку O отмечена точка K так, что $\angle BAC + \angle AKC = 90^\circ$.

- а) Докажите, что четырёхугольник $OBKC$ вписанный.
- б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника $OBKC$, если $\cos \angle BAC = \frac{12}{13}$, а $BC=120$.

II) Четырёхугольник

23.1. Диагонали AC и BD четырёхугольника ABCD, вписанного в окружность, пересекаются в точке P, причём $BC=CD$.

а) Докажите, что $AB:BC=AP:PD$.

б) Найдите площадь треугольника COD, где O – центр окружности, вписанной в треугольник ABD, если дополнительно известно, что BD – диаметр описанной около четырёхугольника ABCD окружности, $AB=5$, а $BC=5\sqrt{2}$.

23.2. Диагонали AC и BD четырёхугольника ABCD, вписанного в окружность, пересекаются в точке P, причём $BC=CD$.

а) Докажите, что $AB:BC=AP:PD$.

б) Найдите площадь треугольника COD, где O – центр окружности, вписанной в треугольник ABD, если дополнительно известно, что BD – диаметр описанной около четырёхугольника ABCD окружности, $AB=6$, а $BC=6\sqrt{2}$.

24.1. (ОБЗ) Точки P, Q, W делят стороны выпуклого четырёхугольника ABCD в отношении $AP:PB=CQ:QB=CW:WD=3:4$, радиус окружности, описанной около треугольника PQW, равен 10, $PQ=16$, $QW=12$, угол PWQ – острый.

а) Докажите, что треугольник PQW – прямоугольный.

б) Найдите площадь четырёхугольника ABCD.

24.2. (ОБЗ) Точки P, Q, W делят стороны выпуклого четырёхугольника ABCD в отношении $AP:PB=CQ:QB=CW:WD=1:4$, радиус окружности, описанной около треугольника PQW, равен 10, $PQ=16$, $QW=12$, угол PWQ – острый.

а) Докажите, что треугольник PQW – прямоугольный.

б) Найдите площадь четырёхугольника ABCD.

25.1. В выпуклом четырёхугольнике ABCD точки K, L, M и N – середины сторон AB, BC, CD и AD соответственно.

Площади четырёхугольников ABLN и NLCD равны, а площади четырёхугольников KBCM и AKMD относятся как 11:17.

а) Докажите, что прямые BC и AD параллельны.

б) Найдите отношение BC к AD.

25.2. В выпуклом четырёхугольнике ABCD точки K, L, M и N – середины сторон AB, BC, CD и AD соответственно.

Площади четырёхугольников ABLN и NLCD равны, а площади четырёхугольников KBCM и AKMD относятся как 9:11.

а) Докажите, что прямые BC и AD параллельны.

б) Найдите отношение BC к AD.

26.1. Точка М лежит на стороне ВС выпуклого четырёхугольника ABCD, причём В и С – вершины равнобедренных треугольников с основаниями АМ и DM соответственно, а прямые АМ и MD перпендикулярны.

а) Докажите, что биссектрисы углов при вершинах В и С четырёхугольника ABCD пересекаются на стороне AD.

б) Пусть N – точка пересечения этих биссектрис. Найдите площадь четырёхугольника ABCD, если известно, что $BM:MC=1:3$, а площадь четырёхугольника, стороны которого лежат на прямых АМ, DM, BN и CN, равна 18.

26.2. Точка М лежит на стороне ВС выпуклого четырёхугольника ABCD, причём В и С – вершины равнобедренных треугольников с основаниями АМ и DM соответственно, а прямые АМ и MD перпендикулярны.

а) Докажите, что биссектрисы углов при вершинах В и С четырёхугольника ABCD пересекаются на стороне AD.

б) Пусть N – точка пересечения этих биссектрис. Найдите площадь четырёхугольника ABCD, если известно, что $BM:MC=2:3$, а площадь четырёхугольника, стороны которого лежат на прямых АМ, DM, BN и CN, равна 12.

III) Параллелограмм

27.1. (ОБЗ) Окружность проходит через вершины А, В и D параллелограмма ABCD, пересекает сторону ВС в точках В и М и пересекает продолжение стороны CD за точку D в точке N.

а) Докажите, что $AM=AN$.

б) Найдите отношение $CD:DN$, если $AB:BC=1:2$, а $\cos \angle BAD = \frac{2}{3}$.

27.2. (ОБЗ) Окружность проходит через вершины А, В и D параллелограмма ABCD, пересекает сторону ВС в точках В и М и пересекает продолжение стороны CD за точку D в точке N.

а) Докажите, что $AM=AN$.

б) Найдите отношение $CD:DN$, если $AB:BC=1:3$, а $\cos \angle BAD = \frac{2}{5}$.

28.1. (ОБЗ) Окружность проходит через вершины А, В и D параллелограмма ABCD, пересекает сторону ВС в точках В и Е и пересекает сторону CD в точках К и D.

а) Докажите, что $AE=AK$.

б) Найдите AD, если $CE=10$, $DK=9$ и $\cos \angle BAD=0,2$.

28.2. (ОБЗ) Окружность проходит через вершины А, В и D параллелограмма ABCD, пересекает сторону ВС в точках В и Е и пересекает сторону CD в точках К и D.

а) Докажите, что $AE=AK$.

б) Найдите AD, если $CE=12$, $DK=9$ и $\cos \angle BAD=0,1$.

29.1. (ОБЗ) На стороне BC параллелограмма $ABCD$ выбрана точка M такая, что $AM=MC$.

а) Докажите, что центр вписанной в треугольник AMD окружности лежит на диагонали AC .

б) Найдите радиус вписанной в треугольник AMD окружности, если $AB=5$, $BC=10$, $\angle BAD=60^\circ$.

29.2. (ОБЗ) На стороне BC параллелограмма $ABCD$ выбрана точка M такая, что $AM=MC$.

а) Докажите, что центр вписанной в треугольник AMD окружности лежит на диагонали AC .

б) Найдите радиус вписанной в треугольник AMD окружности, если $AB=6$, $BC=24$, $\angle BAD=60^\circ$.

29.3. (ОБЗ) На стороне BC параллелограмма $ABCD$ выбрана точка M такая, что $AM=MC$.

а) Докажите, что центр вписанной в треугольник AMD окружности лежит на диагонали AC .

б) Найдите радиус вписанной в треугольник AMD окружности, если $AB=8$, $BC=20$, $\angle BAD=60^\circ$.

29.4. (ОБЗ) На стороне BC параллелограмма $ABCD$ выбрана точка M такая, что $AM=MC$.

а) Докажите, что центр вписанной в треугольник AMD окружности лежит на диагонали AC .

б) Найдите радиус вписанной в треугольник AMD окружности, если $AB=7$, $BC=21$, $\angle BAD=60^\circ$.

30.1. (ОБЗ) Окружность проходит через вершины A , B и C параллелограмма $ABCD$, пересекает продолжение стороны AD за точку D в точке E и пересекает продолжение стороны CD за точку D в точке K .

а) Докажите, что $BK=BE$.

б) Найдите отношение $KE:AC$, если $\angle BAD=30^\circ$.

30.2. (ОБЗ) Окружность проходит через вершины A , B и C параллелограмма $ABCD$, пересекает продолжение стороны AD за точку D в точке E и пересекает продолжение стороны CD за точку D в точке K .

а) Докажите, что $BK=BE$.

б) Найдите отношение $KE:AC$, если $\angle BAD=45^\circ$.

31.1. (ОБЗ) Окружность проходит через вершины A , B и D параллелограмма $ABCD$, пересекает сторону BC в точках B и E и пересекает продолжение стороны CD за точку D в точке K .

а) Докажите, что $AE=AK$.

б) Найдите отношение $KE:BD$, если $\angle BAD=45^\circ$.

31.2. (ОБЗ) Окружность проходит через вершины А, В и D параллелограмма ABCD, пересекает сторону BC в точках В и Е и пересекает продолжение стороны CD за точку D в точке К.

а) Докажите, что $AE=AK$.

б) Найдите отношение $KE:BD$, если $\angle BAD=60^\circ$.

32.1. (ОБЗ) В параллелограмме ABCD угол BAC вдвое больше угла CAD. Биссектриса угла BAC пересекает отрезок BC в точке L. На продолжении стороны CD за точку D выбрана такая точка Е, что $AE=CE$.

а) Докажите, что $AL \cdot BC = AB \cdot AC$.

б) Найдите EL, если $AC=8$, $\operatorname{tg} \angle BCA = \frac{1}{2}$.

32.2. (ОБЗ) В параллелограмме ABCD угол BAC вдвое больше угла CAD. Биссектриса угла BAC пересекает отрезок BC в точке L. На продолжении стороны CD за точку D выбрана такая точка Е, что $AE=CE$.

а) Докажите, что $AL \cdot BC = AB \cdot AC$.

б) Найдите EL, если $AC=12$, $\operatorname{tg} \angle BCA = \frac{1}{4}$.

32.3. (ОБЗ) В параллелограмме ABCD угол BAC вдвое больше угла CAD. Биссектриса угла BAC пересекает отрезок BC в точке L. На продолжении стороны CD за точку D выбрана такая точка Е, что $AE=CE$.

а) Докажите, что $AL \cdot BC = AB \cdot AC$.

б) Найдите EL, если $AC=10$, $\operatorname{tg} \angle BCA = \frac{2}{3}$.

32.4. (ОБЗ) В параллелограмме ABCD угол BAC вдвое больше угла CAD. Биссектриса угла BAC пересекает отрезок BC в точке L. На продолжении стороны CD за точку D выбрана такая точка Е, что $AE=CE$.

а) Докажите, что $AL \cdot BC = AB \cdot AC$.

б) Найдите EL, если $AC=21$, $\operatorname{tg} \angle BCA = \frac{2}{5}$.

33.1. (Демо) В параллелограмме ABCD с острым углом BAD из вершины В проведены высоты BP и BQ, причём точка Р лежит на стороне AD, а точка Q – на стороне CD. На стороне AD отмечена точка М. Известно, что $AM=BP$, $AB=PQ$.

а) Докажите, что $BM=PQ$.

б) Найдите площадь треугольника APQ, если $AM=BP=8$, $AB=BQ=10$.

33.2. (Демо) В параллелограмме ABCD с острым углом BAD из вершины В проведены высоты BP и BQ, причём точка Р лежит на стороне AD, а точка Q – на стороне CD. На стороне AD отмечена точка М. Известно, что $AM=BP$, $AB=PQ$.

а) Докажите, что $BM=PQ$.

б) Найдите площадь треугольника APQ, если $AM=BP=21$, $AB=BQ=29$.

IV) Квадрат

34.1. К окружности, вписанной в квадрат ABCD, проведена касательная, пересекающая стороны AB и AD в точках M и N соответственно.

- а) Докажите, что периметр треугольника AMN равен стороне квадрата.
- б) Прямая MN пересекает прямую CD в точке P. В каком отношении делит сторону BC прямая, проходящая через точку P и центр окружности, если $AM:MB=1:2$?

34.2. К окружности, вписанной в квадрат ABCD, проведена касательная, пересекающая стороны AB и AD в точках M и N соответственно.

- а) Докажите, что периметр треугольника AMN равен стороне квадрата.
- б) Прямая MN пересекает прямую CD в точке P. В каком отношении делит сторону BC прямая, проходящая через точку P и центр окружности, если $AM:MB=1:3$?

35.1. (ОБЗ) В квадрате ABCD точки M и N – середины сторон AB и BC соответственно. Отрезки CM и DN пересекаются в точке K.

- а) Докажите, что $\angle BKM=45^\circ$.
- б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABK, если сторона $AB=2\sqrt{10}$.

35.2. (ОБЗ) В квадрате ABCD точки M и N – середины сторон AB и BC соответственно. Отрезки CM и DN пересекаются в точке K.

- а) Докажите, что $\angle BKM=45^\circ$.
- б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABK, если сторона $AB=4\sqrt{5}$.

35.3. (ОБЗ) В квадрате ABCD точки M и N – середины сторон AB и BC соответственно. Отрезки CM и DN пересекаются в точке K.

- а) Докажите, что $\angle BKM=45^\circ$.
- б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABK, если сторона $AB=2\sqrt{7}$.

35.4. (ОБЗ) В квадрате ABCD точки M и N – середины сторон AB и BC соответственно. Отрезки CM и DN пересекаются в точке K.

- а) Докажите, что $\angle BKM=45^\circ$.
- б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABK, если сторона $AB=4\sqrt{6}$.

V) Ромб

36.1. (ОБЗ) Прямая, перпендикулярная стороне BC ромба ABCD, пересекает его диагональ AC в точке M, а диагональ BD в точке N, причём $AM:MC=1:2$, $BN:ND=1:3$.

- а) Докажите, что $\cos \angle BAD = 0,2$.
- б) Найдите площадь ромба, если $MN=5$.

36.2. (ОБЗ) Прямая, перпендикулярная стороне BC ромба ABCD, пересекает его диагональ AC в точке M, а диагональ BD в точке N, причём $AM:MC=2:3$, $BN:ND=1:2$.

- а) Докажите, что $\cos \angle BAD = 0,25$.
- б) Найдите площадь ромба, если $MN=2$.

36.3. (ОБЗ) Прямая, перпендикулярная стороне BC ромба ABCD, пересекает его диагональ AC в точке M, а диагональ BD в точке N, причём $AM:MC=3:5$, $BN:ND=1:3$.

- а) Докажите, что $\cos \angle BAD = \frac{1}{3}$.
- б) Найдите площадь ромба, если $MN=3$.

36.4. (ОБЗ) Прямая, перпендикулярная стороне BC ромба ABCD, пересекает его диагональ AC в точке M, а диагональ BD в точке N, причём $AM:MC=3:5$, $BN:ND=1:2$.

- а) Докажите, что $\cos \angle BAD = \frac{1}{7}$.
- б) Найдите площадь ромба, если $MN=\sqrt{7}$.

37.1. (ОБЗ) Прямая, перпендикулярная стороне BC ромба ABCD, пересекает его диагональ AC в точке M, а диагональ BD в точке N, причём $AM:MC=1:2$, $BN:ND=1:3$.

- а) Докажите, что прямая MN делит сторону ромба BC в отношении 1:4.
- б) Найдите сторону ромба, если $MN=\sqrt{6}$.

37.2. (ОБЗ) Прямая, перпендикулярная стороне BC ромба ABCD, пересекает его диагональ AC в точке M, а диагональ BD в точке N, причём $AM:MC=1:2$, $BN:ND=1:3$.

- а) Докажите, что прямая MN делит сторону ромба BC в отношении 1:4.
- б) Найдите сторону ромба, если $MN=2\sqrt{3}$.

VI) Трапеция

38.1. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Окружность с центром O , построенная на боковой стороне AB как на диаметре, касается боковой стороны CD и второй раз пересекает большее основание AD в точке H , точка Q – середина CD .

- а) Докажите, что четырёхугольник $DQOH$ – параллелограмм.
- б) Найдите AD , если $\angle BAD = 75^\circ$ и $BC = 1$.

38.2. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Окружность с центром O , построенная на боковой стороне AB как на диаметре, касается боковой стороны CD и второй раз пересекает большее основание AD в точке H , точка Q – середина CD .

- а) Докажите, что четырёхугольник $DQOH$ – параллелограмм.
- б) Найдите AD , если $\angle BAD = 60^\circ$ и $BC = 2$.

38.3. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Окружность с центром O , построенная на боковой стороне AB как на диаметре, касается боковой стороны CD и второй раз пересекает большее основание AD в точке H , точка Q – середина CD .

- а) Докажите, что четырёхугольник $DQOH$ – параллелограмм.
- б) Найдите AD , если $\angle BAD = 67,5^\circ$ и $BC = 3$.

39.1. (ОБЗ) Диагонали равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD перпендикулярны. Окружность с диаметром AD пересекает боковую сторону CD в точке M , а окружность с диаметром CD пересекает основание AD в точке N . Отрезки AM и CN пересекаются в точке P .

- а) Докажите, что в четырёхугольник $ABCP$ можно вписать окружность.
- б) Найдите радиус этой окружности, если $BC = 7$, $AD = 17$.

39.2. (ОБЗ) Диагонали равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD перпендикулярны. Окружность с диаметром AD пересекает боковую сторону CD в точке M , а окружность с диаметром CD пересекает основание AD в точке N . Отрезки AM и CN пересекаются в точке P .

- а) Докажите, что в четырёхугольник $ABCP$ можно вписать окружность.
- б) Найдите радиус этой окружности, если $BC = 7$, $AD = 23$.

40.1. (ОБЗ) В равнобедренной трапеции $ABCD$ основание AD в два раза больше основания BC .

- а) Докажите, что высота CH трапеции разбивает основание AD на отрезки, один из которых втрое больше другого.
- б) Пусть O – точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$. Найдите расстояние от вершины C до середины отрезка OD , если $BC = 16$ и $AB = 10$.

40.2. (ОБЗ) В равнобедренной трапеции ABCD основание AD в два раза больше основания BC.

а) Докажите, что высота СН трапеции разбивает основание AD на отрезки, один из которых втрое больше другого.

б) Пусть О – точка пересечения диагоналей трапеции ABCD. Найдите расстояние от вершины С до середины отрезка OD, если BC=10 и AB=13.

41.1. В прямоугольной трапеции ABCD с прямым углом при вершине А расположены две окружности. Одна из них касается боковых сторон и большего основания AD, вторая – боковых сторон, меньшего основания BC и первой окружности.

а) Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает основание AD в точке Р. Докажите, что $\frac{AP}{PD} = \sin D$.

б) Найдите площадь трапеции, если радиусы окружностей равны $\frac{4}{3}$ и $\frac{1}{3}$.

41.2. В прямоугольной трапеции ABCD с прямым углом при вершине А расположены две окружности. Одна из них касается боковых сторон и большего основания AD, вторая – боковых сторон, меньшего основания BC и первой окружности.

а) Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает основание AD в точке Р. Докажите, что $\frac{AP}{PD} = \sin D$.

б) Найдите площадь трапеции, если радиусы окружностей равны $\frac{5}{2}$ и $\frac{1}{2}$.

41.3. В прямоугольной трапеции ABCD с прямым углом при вершине А расположены две окружности. Одна из них касается боковых сторон и большего основания AD, вторая – боковых сторон, меньшего основания BC и первой окружности.

а) Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает основание AD в точке Р. Докажите, что $\frac{AP}{PD} = \sin D$.

б) Найдите площадь трапеции, если радиусы окружностей равны 3 и 1.

41.4. В прямоугольной трапеции ABCD с прямым углом при вершине А расположены две окружности. Одна из них касается боковых сторон и большего основания AD, вторая – боковых сторон, меньшего основания BC и первой окружности.

а) Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает основание AD в точке Р. Докажите, что $\frac{AP}{PD} = \sin D$.

б) Найдите площадь трапеции, если радиусы окружностей равны 2 и 1.

42.1. (ОБЗ) В равнобедренной трапеции ABCD основание AD в три раза больше основания BC.

а) Докажите, что высота СН трапеции разбивает основание AD на отрезки, один из которых вдвое больше другого.

б) Найдите расстояние от вершины С до середины диагонали BD, если $AD=15$ и $AC=2\sqrt{61}$.

42.2. (ОБЗ) В равнобедренной трапеции ABCD основание AD в три раза больше основания BC.

а) Докажите, что высота СН трапеции разбивает основание AD на отрезки, один из которых вдвое больше другого.

б) Найдите расстояние от вершины С до середины диагонали BD, если $AD=18$ и $AC=4\sqrt{13}$.

43.1. (ОБЗ) Точка Е – середина боковой стороны CD трапеции ABCD. На стороне АВ взяли точку К так, что прямые СК и АЕ параллельны. Отрезки СК и ВЕ пересекаются в точке О.

а) Докажите, что $CO=KO$.

б) Найдите отношение оснований трапеции BC и AD, если площадь треугольника BCK составляет $\frac{9}{100}$ площади трапеции ABCD.

43.2. (ОБЗ) Точка Е – середина боковой стороны CD трапеции ABCD. На стороне АВ взяли точку К так, что прямые СК и АЕ параллельны. Отрезки СК и ВЕ пересекаются в точке О.

а) Докажите, что $CO=KO$.

б) Найдите отношение оснований трапеции BC и AD, если площадь треугольника BCK составляет $\frac{9}{64}$ площади трапеции ABCD.

44.1. (ОБЗ) Сумма оснований трапеции равна 10, а её диагонали равны 6 и 8.

а) Докажите, что диагонали трапеции перпендикулярны.

б) Найдите высоту трапеции.

44.2. (ОБЗ) Сумма оснований трапеции равна 13, а её диагонали равны 5 и 12.

а) Докажите, что диагонали трапеции перпендикулярны.

б) Найдите высоту трапеции.

44.3. (ОБЗ) Сумма оснований трапеции равна 17, а её диагонали равны 8 и 15.

а) Докажите, что диагонали трапеции перпендикулярны.

б) Найдите высоту трапеции.

44.4. (ОБЗ) Сумма оснований трапеции равна 29, а её диагонали равны 20 и 21.

- а) Докажите, что диагонали трапеции перпендикулярны.
- б) Найдите высоту трапеции.

45.1. Одна окружность вписана в прямоугольную трапецию, а вторая касается большей боковой стороны и продолжений оснований.

- а) Докажите, что расстояние между центрами окружностей равно большей боковой стороне трапеции.
- б) Найдите расстояние от вершины одного из прямых углов трапеции до центра второй окружности, если точка касания первой окружности с большей боковой стороной трапеции делит её на отрезки, равные 4 и 36.

45.2. Одна окружность вписана в прямоугольную трапецию, а вторая касается большей боковой стороны и продолжений оснований.

- а) Докажите, что расстояние между центрами окружностей равно большей боковой стороне трапеции.
- б) Найдите расстояние от вершины одного из прямых углов трапеции до центра второй окружности, если точка касания первой окружности с большей боковой стороной трапеции делит её на отрезки, равные 2 и 8.

46.1. (ОБЗ) Дана трапеция ABCD с основаниями AD и BC. Диагональ BD разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и CD.

- а) Докажите, что луч AC – биссектриса угла BAD.
- б) Найдите CD, если известны диагонали трапеции: AC=12 и BD=6,5.

46.2. (ОБЗ) Дана трапеция ABCD с основаниями AD и BC. Диагональ BD разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и CD.

- а) Докажите, что луч AC – биссектриса угла BAD.
- б) Найдите CD, если известны диагонали трапеции: AC=15 и BD=8,5.

47.1. В трапеции ABCD точка E – середина основания AD, точка M – середина боковой стороны AB. Отрезки CE и DM пересекаются в точке O.

- а) Докажите, что площади четырёхугольника AMOE и треугольника COD равны.
- б) Найдите, какую часть от площади трапеции составляет площадь четырёхугольника AMOE, если BC=3, AD=4.

47.2. В трапеции ABCD точка E – середина основания AD, точка M – середина боковой стороны AB. Отрезки CE и DM пересекаются в точке O.

- а) Докажите, что площади четырёхугольника AMOE и треугольника COD равны.
- б) Найдите, какую часть от площади трапеции составляет площадь четырёхугольника AMOE, если BC=5, AD=7.

48.1. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH . На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

- а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.
- б) Найдите отношение BH к ED , если $\angle BCD = 120^\circ$.

48.2. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH . На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

- а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.
- б) Найдите отношение BH к ED , если $\angle BCD = 135^\circ$.

49.1. (ОБЗ) Биссектрисы углов BAD и BCD равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O . Через точку O провели прямую, параллельную основаниям BC и AD .

- а) Докажите, что отрезок этой прямой внутри трапеции равен её боковой стороне.
- б) Найдите отношение длин оснований трапеции, если $AO = CO$ и данная прямая делит сторону AB в отношении $AM:MB = 1:2$.

49.2. (ОБЗ) Биссектрисы углов BAD и BCD равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O . Через точку O провели прямую, параллельную основаниям BC и AD .

- а) Докажите, что отрезок этой прямой внутри трапеции равен её боковой стороне.
- б) Найдите отношение длин оснований трапеции, если $AO = CO$ и данная прямая делит сторону AB в отношении $AM:MB = 2:3$.

50.1. (ОБЗ) В трапеции $ABCD$ основание AD в два раза больше основания BC . Внутри трапеции взяли точку M так, что углы ABM и DCM прямые.

- а) Докажите, что $AM = DM$.
- б) Найдите угол BAD , если угол ADC равен 70° , а расстояние от точки M до прямой AD равно стороне BC .

50.2. (ОБЗ) В трапеции $ABCD$ основание AD в два раза больше основания BC . Внутри трапеции взяли точку M так, что углы ABM и DCM прямые.

- а) Докажите, что $AM = DM$.
- б) Найдите угол BAD , если угол ADC равен 55° , а расстояние от точки M до прямой AD равно стороне BC .

51.1. (ОБЗ) Окружность, вписанная в равнобедренную трапецию $ABCD$, касается её боковой стороны CD в точке M . Луч AM вторично пересекает окружность в точке N , а прямую BC – в точке K , причём $AN = 4$, $MN = 12$.

- а) Докажите, что $\angle AMD = \angle MCK$.
- б) Найдите основания трапеции.

51.2. (ОБЗ) Окружность, вписанная в равнобедренную трапецию $ABCD$, касается её боковой стороны CD в точке M . Луч AM вторично пересекает окружность в точке N , а прямую BC – в точке K , причём $AN=3$, $MN=9$.

- а) Докажите, что $\angle AMD = \angle MCK$.
- б) Найдите основания трапеции.

52.1. (ОБЗ) Биссектрисы углов BAD и BCD равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O . На боковых сторонах AB и CD отмечены точки M и N соответственно так, что $AM=MO$, $CN=NO$.

- а) Докажите, что точки M , O и N лежат на одной прямой.
- б) Найдите отношение $AM:MB$, если $AO=CO$ и $BC:AD=17:31$.

52.2. (ОБЗ) Биссектрисы углов BAD и BCD равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O . На боковых сторонах AB и CD отмечены точки M и N соответственно так, что $AM=MO$, $CN=NO$.

- а) Докажите, что точки M , O и N лежат на одной прямой.
- б) Найдите отношение $AM:MB$, если $AO=CO$ и $BC:AD=1:7$.

53.1 (ОБЗ) Окружность с центром O_1 касается оснований BC и AD и боковой стороны AB трапеции $ABCD$. Окружность с центром O_2 касается сторон BC , CD и AD . Известно, что $AB=10$, $BC=9$, $CD=30$, $AD=39$.

- а) Докажите, что прямая O_1O_2 параллельна основаниям трапеции $ABCD$.
- б) Найдите O_1O_2 .

53.2. (ОБЗ) Окружность с центром O_1 касается оснований BC и AD и боковой стороны AB трапеции $ABCD$. Окружность с центром O_2 касается сторон BC , CD и AD . Известно, что $AB=10$, $BC=8$, $CD=20$, $AD=28$.

- а) Докажите, что прямая O_1O_2 параллельна основаниям трапеции $ABCD$.
- б) Найдите O_1O_2 .

54.1. (ОБЗ) В трапеции $ABCD$ угол BAD прямой. Окружность, построенная на большем основании AD как на диаметре, пересекает меньшее основание BC в точках S и M .

- а) Докажите, что $\angle BAM = \angle CAD$.
- б) Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O . Найдите площадь треугольника AOB , если $AB = \sqrt{10}$, а $BC=2BM$.

54.2. (ОБЗ) В трапеции $ABCD$ угол BAD прямой. Окружность, построенная на большем основании AD как на диаметре, пересекает меньшее основание BC в точках S и M .

- а) Докажите, что $\angle BAM = \angle CAD$.
- б) Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O . Найдите площадь треугольника AOB , если $AB=6$, а $BC=4BM$.

55.1. (ОБЗ) Окружность с центром в точке O высекает на всех сторонах трапеции $ABCD$ равные хорды.

а) Докажите, что биссектрисы всех углов трапеции пересекаются в одной точке.

б) Найдите высоту трапеции, если окружность пересекает боковую сторону AB в точках K и L так, что $AK=11$, $KL=10$, $LB=4$.

55.2. (ОБЗ) Окружность с центром в точке O высекает на всех сторонах трапеции $ABCD$ равные хорды.

а) Докажите, что биссектрисы всех углов трапеции пересекаются в одной точке.

б) Найдите высоту трапеции, если окружность пересекает боковую сторону AB в точках K и L так, что $AK=13$, $KL=6$, $LB=1$.

55.3. (ОБЗ) Окружность с центром в точке O высекает на всех сторонах трапеции $ABCD$ равные хорды.

а) Докажите, что биссектрисы всех углов трапеции пересекаются в одной точке.

б) Найдите высоту трапеции, если окружность пересекает боковую сторону AB в точках K и L так, что $AK=15$, $KL=6$, $LB=5$.

55.4. (ОБЗ) Окружность с центром в точке O высекает на всех сторонах трапеции $ABCD$ равные хорды.

а) Докажите, что биссектрисы всех углов трапеции пересекаются в одной точке.

б) Найдите высоту трапеции, если окружность пересекает боковую сторону AB в точках K и L так, что $AK=23$, $KL=4$, $LB=2$.

VII) Пятиугольник

56.1. (ОБЗ) Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Известно, что $AB=CD=3$, $BC=DE=4$.

а) Докажите, что $AC=CE$.

б) Найдите длину диагонали BE , если $AD=6$.

56.2. (ОБЗ) Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Известно, что $AB=CD=4$, $BC=DE=6$.

а) Докажите, что $AC=CE$.

б) Найдите длину диагонали BE , если $AD=7$.

57.1. (ОБЗ) Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Диагонали AD и BE пересекаются в точке M . Известно, что $BCDM$ – параллелограмм.

а) Докажите, что $BC=DE$.

б) Найдите длину стороны AB , если известно, что $DE=4$, $AD=7$, $BE=8$ и $AB>BC$.

- 57.2.** (ОБЗ) Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Диагонали AD и BE пересекаются в точке M . Известно, что $BCDM$ – параллелограмм.
- а) Докажите, что $BC=DE$.
 - б) Найдите длину стороны AB , если известно, что $DE=5$, $AD=9$, $BE=12$ и $AB>BC$.

VIII) Окружность

58.1. (ОБЗ) Окружность с центром в точке O касается сторон угла с вершиной N в точках A и B . Отрезок BC – диаметр этой окружности.

- а) Докажите, что прямая AC параллельна биссектрисе угла ANB .
- б) Найдите длину отрезка NO , если известно, что $AC=10$ и $AB=24$.

58.2. (ОБЗ) Окружность с центром в точке O касается сторон угла с вершиной N в точках A и B . Отрезок BC – диаметр этой окружности.

- а) Докажите, что прямая AC параллельна биссектрисе угла ANB .
- б) Найдите длину отрезка NO , если известно, что $AC=14$ и $AB=48$.

59.1. (ОБЗ) Окружность с центром в точке O касается сторон угла с вершиной N в точках A и B . Отрезок BC – диаметр этой окружности.

- а) Докажите, что $\angle ANB=2\angle ABC$.
- б) Найдите расстояние от точки N до прямой AB , если известно, что $AC=14$ и $AB=36$.

59.2. (ОБЗ) Окружность с центром в точке O касается сторон угла с вершиной N в точках A и B . Отрезок BC – диаметр этой окружности.

- а) Докажите, что $\angle ANB=2\angle ABC$.
- б) Найдите расстояние от точки N до прямой AB , если известно, что $AC=15$ и $AB=54$.

60.1. (ОБЗ) Две окружности разных радиусов касаются внешним образом в точке C . Вершины A и B равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежат на меньшей и большей окружностях соответственно. Прямая AC вторично пересекает большую окружность в точке E , а прямая BC вторично пересекает меньшую окружность в точке D .

- а) Докажите, что прямые AD и BE параллельны.
- б) Найдите BC , если радиусы окружностей равны $\sqrt{15}$ и 15 .

60.2. (ОБЗ) Две окружности разных радиусов касаются внешним образом в точке C . Вершины A и B равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежат на меньшей и большей окружностях соответственно. Прямая AC вторично пересекает большую окружность в точке E , а прямая BC вторично пересекает меньшую окружность в точке D .

- а) Докажите, что прямые AD и BE параллельны.
- б) Найдите BC , если радиусы окружностей равны 2 и $\sqrt{5}$.

61.1. (ОБЗ) Периметр треугольника ABC равен 36. Точки E и F – середины сторон AB и BC соответственно. Отрезок EF касается окружности, вписанной в треугольник ABC.

а) Докажите, что $AC=9$.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если $\angle ACB=90^\circ$.

61.2. (ОБЗ) Периметр треугольника ABC равен 24. Точки E и F – середины сторон AB и BC соответственно. Отрезок EF касается окружности, вписанной в треугольник ABC.

а) Докажите, что $AC=6$.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если $\angle ACB=90^\circ$.

62.1. (ОБЗ) В треугольнике ABC точки M и N лежат на сторонах AB и BC соответственно так, что $AM:MB=CN:NB=2:3$. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается отрезка MN в точке L.

а) Докажите, что $AB+BC=4AC$.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, если $ML=\frac{9}{5}$, $LN=3$.

62.2. (ОБЗ) В треугольнике ABC точки M и N лежат на сторонах AB и BC соответственно так, что $AM:MB=CN:NB=1:2$. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается отрезка MN в точке L.

а) Докажите, что $AB+BC=5AC$.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, если $ML=1$, $LN=3$.

63.1. (ОБЗ) Две окружности касаются внутренним образом в точке C. Вершины A и B равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежат на меньшей и большей окружностях соответственно. Прямая AC вторично пересекает большую окружность в точке E, а прямая BC вторично пересекает меньшую окружность в точке D.

а) Докажите, что прямые AD и BE параллельны.

б) Найдите AC, если радиусы окружностей равны 3 и 4.

63.2. (ОБЗ) Две окружности касаются внутренним образом в точке C. Вершины A и B равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежат на меньшей и большей окружностях соответственно. Прямая AC вторично пересекает большую окружность в точке E, а прямая BC вторично пересекает меньшую окружность в точке D.

а) Докажите, что прямые AD и BE параллельны.

б) Найдите AC, если радиусы окружностей равны 8 и 15.

64.1. Точка В лежит на отрезке АС. Прямая, проходящая через точку А, касается окружности с диаметром ВС в точке М и второй раз пересекает окружность с диаметром АВ в точке К. Продолжение отрезка МВ пересекает окружность с диаметром АВ в точке D.

а) Докажите, что прямые AD и MC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника DBC, если $AK=3$ и $MK=12$.

64.2. Точка В лежит на отрезке АС. Прямая, проходящая через точку А, касается окружности с диаметром ВС в точке М и второй раз пересекает окружность с диаметром АВ в точке К. Продолжение отрезка МВ пересекает окружность с диаметром АВ в точке D.

а) Докажите, что прямые AD и MC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника DBC, если $AK=4$ и $MK=12$.

65.1. (ОБЗ) Две окружности касаются внутренним образом в точке А, причём меньшая проходит через центр большей. Хорда ВС большей окружности касается меньшей в точке Р. Хорды АВ и АС пересекают меньшую окружность в точках К и М соответственно.

а) Докажите, что прямые KM и BC параллельны.

б) Пусть L – точка пересечения отрезков KM и AP. Найдите длину отрезка AL, если радиус большей окружности равен 34, а $BC=32$.

65.2. (ОБЗ) Две окружности касаются внутренним образом в точке А, причём меньшая проходит через центр большей. Хорда ВС большей окружности касается меньшей в точке Р. Хорды АВ и АС пересекают меньшую окружность в точках К и М соответственно.

а) Докажите, что прямые KM и BC параллельны.

б) Пусть L – точка пересечения отрезков KM и AP. Найдите длину отрезка AL, если радиус большей окружности равен 10, а $BC=16$.

65.3. (ОБЗ) Две окружности касаются внутренним образом в точке А, причём меньшая проходит через центр большей. Хорда ВС большей окружности касается меньшей в точке Р. Хорды АВ и АС пересекают меньшую окружность в точках К и М соответственно.

а) Докажите, что прямые KM и BC параллельны.

б) Пусть L – точка пересечения отрезков KM и AP. Найдите длину отрезка AL, если радиус большей окружности равен 10, а $BC=12$.

65.4. (ОБЗ) Две окружности касаются внутренним образом в точке А, причём меньшая проходит через центр большей. Хорда ВС большей окружности касается меньшей в точке Р. Хорды АВ и АС пересекают меньшую окружность в точках К и М соответственно.

а) Докажите, что прямые KM и BC параллельны.

б) Пусть L – точка пересечения отрезков KM и AP. Найдите длину отрезка AL, если радиус большей окружности равен 26, а $BC=48$.