19. Числа и их свойства
Часть 1. ФИПИ

I) Числа и их свойства

Задание 1.1.
а) Приведите пример четырёхзначного числа, произведение цифр которого в 10 раз больше суммы цифр этого числа.
б) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр которого в 175 раз больше суммы цифр этого числа?
в) Найдите все четырёхзначные числа, произведение цифр которых в 50 раз больше суммы цифр этого числа.

Задание 1.2.
а) Приведите пример четырёхзначного числа, произведение цифр которого в 14 раз больше суммы цифр этого числа.
б) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр которого в 210 раз больше суммы цифр этого числа?
в) Найдите все четырёхзначные числа, произведение цифр которых в 49 раз больше суммы цифр этого числа.

Задание 2.1.
Максим должен был умножить двузначное число на трёхзначное число (числа с нуля начинаться не могут). Вместо этого он просто приписал трёхзначное число справа к двузначному, получив пятизначное число, которое оказалось в N раз (N – натуральное число) больше правильного результата.
а) Могло ли N равняться 2?
б) Могло ли N равняться 10?
в) Каково наибольшее возможное значение N?

Задание 2.2.
Костя должен был умножить трёхзначное число на четырёхзначное число (числа с нуля начинаться не могут). Вместо этого он просто приписал четырёхзначное число справа к трёхзначному, получив семизначное число, которое оказалось в N раз (N – натуральное число) больше правильного результата.
а) Могло ли N равняться 2?
б) Могло ли N равняться 10?
в) Каково наибольшее возможное значение N?

Задание 3.1. (ОБЗ)
С трёхзначным числом производят следующую операцию: вычитают из него сумму его цифр, а затем получившуюся разность делят на 3.
а) Могло ли в результате такой операции получиться число 300?
б) Могло ли в результате такой операции получиться число 151?
в) Сколько различных чисел может получиться в результате такой операции из чисел от 100 до 600 включительно?

Задание 3.2. (ОБЗ)
С трёхзначным числом производят следующую операцию: вычитают из него сумму его цифр, а затем получившуюся разность делят на 3.
а) Могло ли в результате такой операции получиться число 201?
б) Могло ли в результате такой операции получиться число 251?
в) Сколько различных чисел может получиться в результате такой операции из чисел от 600 до 999 включительно?

Задание 4.1. (ОБЗ)
С трёхзначным числом производят следующую операцию: к нему прибавляют цифру десятков, умноженную на 10, а затем к получившейся сумме прибавляют 3.
а) Могло ли в результате такой операции получиться число 224?
б) Могло ли в результате такой операции получиться число 314?
в) Найдите наибольшее отношение получившегося числа к исходному.

Задание 4.2. (ОБЗ)
С трёхзначным числом производят следующую операцию: к нему прибавляют цифру десятков, умноженную на 20, а затем к получившейся сумме прибавляют 3.
а) Могло ли в результате такой операции получиться число 367?
б) Могло ли в результате такой операции получиться число 415?
в) Найдите наибольшее отношение получившегося числа к исходному.

Задание 5.1.
Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля).
а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 20?
б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 81?
в) Какое наименьшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

Задание 5.2.
Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля).
а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 12?
б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 87?
в) Какое наименьшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

Задание 6.1.
Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля), не кратное 100.
а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 89?
б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 86?
в) Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

Задание 6.2.
Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля), не кратное 100.

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 90?
б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 88?
в) Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

Задание 6.3.
Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля), не кратное 100.

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 82?
б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 83?
в) Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

Задание 6.4.
Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля), не кратное 100.

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 70?
б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 81?
в) Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

Задание 7.1.
Натуральные числа a, b, c и d удовлетворяют условию $a>b>c>d$.

а) Найдите числа a, b, c и d, если $a+b+c+d=15$ и $a^2-b^2+c^2-d^2=19$.
б) Может ли быть $a+b+c+d=23$ и $a^2-b^2+c^2-d^2=23$?
в) Пусть $a+b+c+d=1200$ и $a^2-b^2+c^2-d^2=1200$. Найдите количество возможных значений числа a.

Задание 7.2.
Натуральные числа a, b, c и d удовлетворяют условию $a>b>c>d$.

а) Найдите числа a, b, c и d, если $a+b+c+d=16$ и $a^2-b^2+c^2-d^2=32$.
б) Может ли быть $a+b+c+d=29$ и $a^2-b^2+c^2-d^2=29$?
в) Пусть $a+b+c+d=1400$ и $a^2-b^2+c^2-d^2=1400$. Найдите количество возможных значений числа a.

Задание 7.3.
Натуральные числа a, b, c и d удовлетворяют условию $a>b>c>d$.

а) Найдите числа a, b, c и d, если $a+b+c+d=15$ и $a^2-b^2+c^2-d^2=27$.
б) Может ли быть $a+b+c+d=19$ и $a^2-b^2+c^2-d^2=19$?
в) Пусть $a+b+c+d=1000$ и $a^2-b^2+c^2-d^2=1000$. Найдите количество возможных значений числа a.

Задание 7.4.
Натуральные числа a, b, c и d удовлетворяют условию $a>b>c>d$.
а) Найдите числа a, b, c и d, если $a+b+c+d=19$ и $a^2-b^2+c^2-d^2=25$.
б) Может ли быть $a+b+c+d=27$ и $a^2-b^2+c^2-d^2=27$?
в) Пусть $a+b+c+d=1800$ и $a^2-b^2+c^2-d^2=1800$. Найдите количество возможных значений числа a.

Задание 8.1. (ОБЗ)
Для чисел A и B, состоящих из одинакового количества цифр, вычисляют S – сумму произведений соответствующих цифр. Например, для чисел A=123 и B=579 получается сумма $S=1\cdot5+2\cdot7+3\cdot9=46$.
а) Существуют ли трёхзначные числа A и B, для которых S=200?
б) Существуют ли четырёхзначные числа A и B, для которых S=320?
в) Верно ли, что любое натуральное число от 1 до 340 является суммой S для некоторых пятизначных чисел A и B?

Задание 8.2. (ОБЗ)
Для чисел A и B, состоящих из одинакового количества цифр, вычисляют S – сумму произведений соответствующих цифр. Например, для чисел A=123 и B=579 получается сумма $S=1\cdot5+2\cdot7+3\cdot9=46$.
а) Существуют ли трёхзначные числа A и B, для которых S=100?
б) Существуют ли четырёхзначные числа A и B, для которых S=400?
в) Верно ли, что любое натуральное число от 1 до 260 является суммой S для некоторых пятизначных чисел A и B?

Задание 9.1.
Каждое из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{350}$ равно 1, 2, 3 или 4. Обозначим $S_1=a_1+a_2+\ldots+a_{350}$, $S_2=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{350}^2$,
$S_3=a_1^3+a_2^3+\ldots+a_{350}^3$, $S_4=a_1^4+a_2^4+\ldots+a_{350}^4$.
Известно, что $S_1=569$.
а) Найдите S_4, если еще известно, что $S_2=1307$, $S_3=3953$.
б) Может ли $S_4=4857$?
в) Пусть $S_4=4785$. Найдите все значения, которые может принимать S_2.

Задание 9.2.
Каждое из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{350}$ равно 1, 2, 3 или 4. Обозначим $S_1=a_1+a_2+\ldots+a_{350}$, $S_2=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{350}^2$,
$S_3=a_1^3+a_2^3+\ldots+a_{350}^3$, $S_4=a_1^4+a_2^4+\ldots+a_{350}^4$.
Известно, что $S_1=513$.
а) Найдите S_4, если еще известно, что $S_2=1097$, $S_3=3243$.
б) Может ли $S_4=4547$?
в) Пусть $S_4=4745$. Найдите все значения, которые может принимать S_2.

Задание 9.3.

Каждое из чисел a_1, a_2, ..., a_{350} равно 1, 2, 3 или 4. Обозначим $S_1 = a_1 + a_2 + ... + a_{450}$, $S_2 = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{450}^2$,
$S_3 = a_1^3 + a_2^3 + ... + a_{450}^3$, $S_4 = a_1^4 + a_2^4 + ... + a_{450}^4$.

Известно, что S_1=739.

а) Найдите S_4, если еще известно, что S_2=1779, S_3=5611.

б) Может ли S_4=6547?

в) Пусть S_4=6435. Найдите все значения, которые может принимать S_2.

Задание 9.4.

Каждое из чисел a_1, a_2, ..., a_{350} равно 1, 2, 3 или 4. Обозначим $S_1 = a_1 + a_2 + ... + a_{450}$, $S_2 = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{450}^2$,
$S_3 = a_1^3 + a_2^3 + ... + a_{450}^3$, $S_4 = a_1^4 + a_2^4 + ... + a_{450}^4$.

Известно, что S_1=721.

а) Найдите S_4, если еще известно, что S_2=1543, S_3=4153.

б) Может ли S_4=4243?

в) Пусть S_4=6315. Найдите все значения, которые может принимать S_2.

Задание 10.1.

а) Чему равно число способов записать число 1193 в виде $1193 = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i – целые, $0 \le a_i \le 99$, $i = 0; 1; 2; 3$?

б) Существуют ли 10 различных чисел N таких, что их можно представить в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i – целые, $0 \le a_i \le 99$, $i = 0; 1; 2; 3$, ровно 120 способами?

в) Сколько существует чисел N таких, что их можно представить в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i – целые, $0 \le a_i \le 99$, $i = 0; 1; 2; 3$, ровно 120 способами?

Задание 10.2.

а) Чему равно число способов записать число 1595 в виде $1595 = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i – целые, $0 \le a_i \le 99$, $i = 0; 1; 2; 3$?

б) Существуют ли 10 различных чисел N таких, что их можно представить в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i – целые, $0 \le a_i \le 99$, $i = 0; 1; 2; 3$, ровно 160 способами?

в) Сколько существует чисел N таких, что их можно представить в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i – целые, $0 \le a_i \le 99$, $i = 0; 1; 2; 3$, ровно 160 способами?

Задание 10.3.

а) Чему равно число способов записать число 1492 в виде $1492 = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i – целые, $0 \le a_i \le 99$, $i = 0; 1; 2; 3$?

б) Существуют ли 10 различных чисел N таких, что их можно представить в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i – целые, $0 \le a_i \le 99$, $i = 0; 1; 2; 3$, ровно 150 способами?

в) Сколько существует чисел N таких, что их можно представить в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i – целые, $0 \le a_i \le 99$, $i = 0; 1; 2; 3$, ровно 150 способами?

Задание 10.4.

а) Чему равно число способов записать число 1292 в виде $1292 = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i – целые, $0 \le a_i \le 99$, $i = 0; 1; 2; 3$?

б) Существуют ли 10 различных чисел N таких, что их можно представить в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i – целые, $0 \le a_i \le 99$, $i = 0; 1; 2; 3$, ровно 130 способами?

в) Сколько существует чисел N таких, что их можно представить в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i – целые, $0 \le a_i \le 99$, $0 \le a_i \le 99$, ровно 130 способами?

Задание 11.1. (ОБЗ)

Из набора цифр 0, 1, 2, 3, 5, 7 и 9 составляют пару чисел, используя каждую цифру ровно один раз. Оказалось, что одно из этих чисел четырёхзначное, другое – трёхзначное и оба кратны 45.

а) Может ли сумма такой пары чисел равняться 2205?

б) Может ли сумма такой пары чисел равняться 3435?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел в этой паре?

Задание 11.2. (ОБЗ)

Из набора цифр 0, 1, 2, 3, 5, 7 и 9 составляют пару чисел, используя каждую цифру ровно один раз. Оказалось, что одно из этих чисел четырёхзначное и кратно 75, другое – трёхзначное и кратно 6.

а) Может ли сумма такой пары чисел равняться 3942?

б) Может ли сумма такой пары чисел равняться 5752?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел в этой паре?

Задание 11.3. (ОБЗ)

Из набора цифр 2, 3, 5, 6, 7, 8 и 9 составляют пару чисел, используя каждую цифру ровно один раз. Оказалось, что одно из этих чисел пятизначное и кратно 4, другое – двузначное и кратно 36.

а) Может ли сумма такой пары чисел равняться 59 008?

б) Может ли сумма такой пары чисел равняться 97 534?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел в этой паре?

Задание 11.4. (ОБЗ)
Из набора цифр 1, 2, 3, 4, 6, 7 и 8 составляют пару чисел, используя каждую цифру ровно один раз. Оказалось, что одно из этих чисел пятизначное, другое – двузначное и кратно 36.

а) Может ли сумма такой пары чисел равняться 14 908?
б) Может ли сумма такой пары чисел равняться 74 134?
в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел в этой паре?

Задание 12.1.
Число S таково, что для любого представления S в виде суммы положительных слагаемых, каждое из которых не превосходит 1, эти слагаемые можно разделить на две группы так, что каждое слагаемое попадает только в одну группу и сумма слагаемых в каждой группе не превосходит 16.

а) Может ли число S быть равным 32?

б) Может ли число S быть больше $31\frac{1}{17}$?

в) Найдите максимальное возможное значение S.

Задание 12.2.
Число S таково, что для любого представления S в виде суммы положительных слагаемых, каждое из которых не превосходит 1, эти слагаемые можно разделить на две группы так, что каждое слагаемое попадает только в одну группу и сумма слагаемых в каждой группе не превосходит 17.

а) Может ли число S быть равным 34?

б) Может ли число S быть больше $33\frac{1}{18}$?

в) Найдите максимальное возможное значение S.

Задание 12.3.
Число S таково, что для любого представления S в виде суммы положительных слагаемых, каждое из которых не превосходит 1, эти слагаемые можно разделить на две группы так, что каждое слагаемое попадает только в одну группу и сумма слагаемых в каждой группе не превосходит 15.

а) Может ли число S быть равным 30?

б) Может ли число S быть больше $29\frac{1}{16}$?

в) Найдите максимальное возможное значение S.

Задание 12.4.
Число S таково, что для любого представления S в виде суммы положительных слагаемых, каждое из которых не превосходит 1, эти слагаемые можно разделить на две группы так, что каждое слагаемое попадает только в одну группу и сумма слагаемых в каждой группе не превосходит 18.

а) Может ли число S быть равным 36?

б) Может ли число S быть больше $35\frac{1}{19}$?

в) Найдите максимальное возможное значение S.

Задание 12.5.
Число S таково, что для любого представления S в виде суммы положительных слагаемых, каждое из которых не превосходит 1, эти слагаемые можно разделить на две группы так, что каждое слагаемое попадает только в одну группу и сумма слагаемых в каждой группе не превосходит 20.

а) Может ли число S быть равным 40?

б) Может ли число S быть больше $39\frac{1}{21}$?

в) Найдите максимальное возможное значение S.

Задание 12.6.
Число S таково, что для любого представления S в виде суммы положительных слагаемых, каждое из которых не превосходит 1, эти слагаемые можно разделить на две группы так, что каждое слагаемое попадает только в одну группу и сумма слагаемых в каждой группе не превосходит 19.

а) Может ли число S быть равным 38?

б) Может ли число S быть больше $37\frac{1}{20}$?

в) Найдите максимальное возможное значение S.

Задание 13.1. (ОБЗ)
Из правильной несократимой дроби $\frac{a}{b}$, где a и b – натуральные числа, за один ход получают дробь $\frac{a+b}{2a+b}$.

а) Можно ли за несколько таких ходов из дроби $\frac{1}{3}$ получить дробь $\frac{22}{31}$?

б) Можно ли за два таких хода из некоторой дроби получить дробь $\frac{7}{12}$?

в) Несократимая дробь $\frac{c}{d}$ больше 0,7. Найдите наименьшую дробь $\frac{c}{d}$, которую нельзя получить ни из какой правильной несократимой дроби за два таких хода?

Задание 13.2. (ОБЗ)

Из правильной несократимой дроби $\frac{a}{b}$, где a и b – натуральные числа, за один ход получают дробь $\frac{a+b}{2a+b}$.

а) Можно ли за несколько таких ходов из дроби $\frac{1}{5}$ получить дробь $\frac{32}{45}$?

б) Можно ли за три таких хода из некоторой дроби получить дробь $\frac{15}{17}$?

в) Несократимая дробь $\frac{c}{d}$ меньше 0,7. Найдите наибольшую дробь $\frac{c}{d}$, которую нельзя получить ни из какой правильной несократимой дроби за два таких хода?

Задание 14.1. (ОБЗ)

Из пары натуральных чисел (a; b), где $a>b$, за один ход получают пару ($a+b$; $a-b$).

а) Можно ли за несколько таких ходов получить из пары (100; 1) пару, большее число в которой равно 400?
б) Можно ли за несколько таких ходов получить из пары (100; 1) пару (806; 788)?
в) Какое наименьшее a может быть в паре (a; b), из которой за несколько ходов можно получить пару (806; 788)?

Задание 14.2. (ОБЗ)

Из пары натуральных чисел (a; b), где $a>b$, за один ход получают пару ($a+b$; $a-b$).

а) Можно ли за несколько таких ходов получить из пары (50; 9) пару, большее число в которой равно 200?
б) Можно ли за несколько таких ходов получить из пары (50; 9) пару (408; 370)?
в) Какое наименьшее a может быть в паре (a; b), из которой за несколько ходов можно получить пару (408; 370)?

Задание 15.1. (ОБЗ)

Из пары натуральных чисел ($a; b$) за один ход можно получить пару ($a+2$; $b-1$) или ($a-1$; $b+2$) при условии, что оба числа в новой паре положительны. Сначала есть пара (5; 7).

а) Можно ли за 50 таких ходов получить пару, в которой одно из чисел равно 100?
б) За какое число ходов получится пара, сумма чисел в которой равна 400?
в) Какое наибольшее число ходов можно сделать так, чтобы после каждого хода оба числа в паре не превосходили 100?

Задание 15.2. (ОБЗ)
Из пары натуральных чисел $(a; b)$ за один ход можно получить пару $(a+2; b-1)$ или $(a-1; b+2)$ при условии, что оба числа в новой паре положительны. Сначала есть пара (4; 5).

а) Можно ли за 100 таких ходов получить пару, в которой одно из чисел равно 200?
б) За какое число ходов получится пара, сумма чисел в которой равна 300?
в) Какое наибольшее число ходов можно сделать так, чтобы после каждого хода оба числа в паре не превосходили 200?

Задание 16.1. (ОБЗ)
Над парами целых чисел проводится операция: из пары $(a; b)$ получается пара $(3a+b; 3b-a)$.

а) Можно ли из какой-то пары получить пару (5; 5)?
б) Верно ли, что если пара $(c; d)$ может быть получена из какой-то пары с помощью данной операции, то и пара $(-d; c)$ тоже может быть получена из какой-то пары с помощью данной операции?
в) Зададим расстояние между парами целых чисел $(a; b)$ и $(c; d)$ выражением $|a-c|+|b-d|$. Найдите наименьшее расстояние от пары (9; 2) до пары, полученной из какой-то пары с помощью данной операции.

Задание 16.2. (ОБЗ)
Над парами целых чисел проводится операция: из пары $(a; b)$ получается пара $(3a+b; 3b+a)$.

а) Можно ли из какой-то пары получить пару (5; −1)?
б) Верно ли, что если пара $(c; d)$ может быть получена из какой-то пары с помощью данной операции, то и пара $(c-d; d-c)$ тоже может быть получена из какой-то пары с помощью данной операции?
в) Зададим расстояние между парами целых чисел $(a; b)$ и $(c; d)$ выражением $\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$. Найдите наименьшее расстояние от пары (9; 11) до пары, полученной из какой-то пары с помощью данной операции.

<u>II) Последовательности и прогрессии</u>

Задание 17.1.
В ряд выписаны числа: $1^2,\ 2^2, \ldots, (N-1)^2,\ N^2$. Между ними произвольным образом расставляют знаки « + » и « − » и находят получившуюся сумму. Может ли такая сумма равняться:

а) 12, если $N=12$?
б) 0, если $N=70$?
в) 0, если $N=48$?
г) −3, если $N=90$?

Задание 17.2.

В ряд выписаны числа: $1^2,\ 2^2, \ldots, (N-1)^2,\ N^2$. Между ними произвольным образом расставляют знаки «$+$» и «$-$» и находят получившуюся сумму. Может ли такая сумма равняться:

а) 4, если N=12?
б) 0, если N=69?
в) 0, если N=64?
г) 5, если N=90?

Задание 17.3.

В ряд выписаны числа: $1^2,\ 2^2, \ldots, (N-1)^2,\ N^2$. Между ними произвольным образом расставляют знаки «$+$» и «$-$» и находят получившуюся сумму. Может ли такая сумма равняться:

а) -4, если N=12?
б) 0, если N=49?
в) 0, если N=40?
г) -3, если N=90?

Задание 17.4.

В ряд выписаны числа: $1^2,\ 2^2, \ldots, (N-1)^2,\ N^2$. Между ними произвольным образом расставляют знаки «$+$» и «$-$» и находят получившуюся сумму. Может ли такая сумма равняться:

а) 12, если N=12?
б) 0, если N=50?
в) 0, если N=80?
г) 5, если N=90?

Задание 18.1.

Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 10 раз больше, либо в 10 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3024.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?
б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?
в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Задание 18.2.

Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 13 раз больше, либо в 13 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3345.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?
б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?
в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Задание 18.3.
Все члены последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 11 раз больше, либо в 11 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 2231.
а) Может ли последовательность состоять из двух членов?
б) Может ли последовательность состоять из трех членов?
в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Задание 18.4.
Все члены последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 15 раз больше, либо в 15 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3825.
а) Может ли последовательность состоять из двух членов?
б) Может ли последовательность состоять из трех членов?
в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Задание 19.1.
Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geq 3$).
а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 15?
б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 950?
в) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 141.

Задание 19.2.
Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geq 3$).
а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 14?
б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 900?
в) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 123.

Задание 19.3.
Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geq 3$).
а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 18?
б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 800?
в) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 111.

Задание 19.4.
Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geq 3$).
а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 10?
б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 1000?
в) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 129.

Задание 19.5.
Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geq 3$).
а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 13?
б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 500?
в) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 57.

Задание 19.6.
Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geq 3$).
а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 16?
б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 900?
в) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 235.

Задание 20.1.
В последовательности $a^1, a^2, \ldots, a^{n-1}, a^n$, состоящей из целых чисел, $a^1 = 1$, $a^n = 235$. Сумма любых двух соседних членов последовательности равна 3, 5 или 25.
а) Приведите пример такой последовательности.
б) Может ли такая последовательность состоять из 1000 членов?
в) Из какого наименьшего числа членов может состоять такая последовательность?

Задание 20.2.
В последовательности $a^1, a^2, \ldots, a^{n-1}, a^n$, состоящей из целых чисел, $a^1 = 3$, $a^n = 109$. Сумма любых двух соседних членов последовательности равна 1, 3 или 13.
а) Приведите пример такой последовательности.
б) Может ли такая последовательность состоять из 32 членов?
в) Из какого наименьшего числа членов может состоять такая последовательность?

Задание 21.1. (ОБЗ)
Каждое из четырёх последовательных натуральных чисел, последние цифры которых не равны нулю, поделили на его последнюю цифру. Сумма получившихся чисел равна S.

а) Может ли S быть равной $16\frac{5}{6}$?

б) Может ли S быть равной $569\frac{29}{126}$?

в) Найдите наибольшее целое значение S, если каждое из исходных чисел было трёхзначным.

Задание 21.2. (ОБЗ)
Каждое из четырёх последовательных натуральных чисел, последние цифры которых не равны нулю, поделили на его последнюю цифру. Сумма получившихся чисел равна S.

а) Может ли S быть равной $16\frac{5}{6}$?

б) Может ли S быть равной $369\frac{29}{126}$?

в) Найдите наибольшее целое значение S, если каждое из исходных чисел было трёхзначным.

Задание 22.1.
Из 25 последовательных нечётных чисел 1, 3, 5, ..., 49 выбрали 9 различных чисел, которые записали в порядке возрастания. Пусть A – пятое по величине среди этих чисел, а B – среднее арифметическое выбранных девяти чисел.

а) Может ли $B-A$ равняться $\frac{1}{9}$?

б) Может ли $B-A$ равняться $\frac{2}{9}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение $B-A$.

Задание 22.2.
Из 24 последовательных нечётных чисел 1, 3, 5, ..., 47 выбрали 9 различных чисел, которые записали в порядке возрастания. Пусть A – пятое по величине среди этих чисел, а B – среднее арифметическое выбранных девяти чисел.

а) Может ли $B-A$ равняться $\frac{2}{9}$?

б) Может ли $B-A$ равняться $\frac{5}{9}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение $B-A$.

Задание 22.3.
Из 40 последовательных нечётных чисел 1, 3, 5, ..., 79 выбрали 7 различных чисел, которые записали в порядке возрастания. Пусть A – пятое по величине среди этих чисел, а B – среднее арифметическое выбранных девяти чисел.

а) Может ли B−A равняться $\frac{2}{7}$?

б) Может ли B−A равняться $\frac{3}{7}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение B−A.

Задание 22.4.
Из 30 последовательных нечётных чисел 1, 3, 5, ..., 59 выбрали 7 различных чисел, которые записали в порядке возрастания. Пусть A – пятое по величине среди этих чисел, а B – среднее арифметическое выбранных девяти чисел.

а) Может ли B−A равняться $\frac{1}{7}$?

б) Может ли B−A равняться $\frac{2}{7}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение B−A.

Задание 23.1.
а) Существует ли конечная арифметическая прогрессия, состоящая из пяти натуральных чисел, такая, что сумма наибольшего и наименьшего членов этой прогрессии равна 99?
б) Конечная арифметическая прогрессия состоит из шести натуральных чисел. Сумма наибольшего и наименьшего членов этой прогрессии равна 9. Найдите все числа, из которых состоит эта прогрессия.
в) Среднее арифметическое членов конечной арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, равно 6,5. Какое наибольшее количество членов может быть в этой прогрессии?

Задание 23.2.
а) Существует ли конечная арифметическая прогрессия, состоящая из семи натуральных чисел, такая, что сумма наибольшего и наименьшего членов этой прогрессии равна 39?
б) Конечная арифметическая прогрессия состоит из восьми натуральных чисел, сумма наибольшего и наименьшего членов равна 11. Найдите все числа, из которых состоит эта прогрессия.
в) Среднее арифметическое членов конечной арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, равно 8,5. Какое наибольшее количество членов может быть в этой прогрессии?

Задание 24.1.
Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 720, и
а) пять;
б) четыре;
в) три из них образуют геометрическую прогрессию?

Задание 24.2.
Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 792, и
а) пять;
б) четыре;
в) три из них образуют геометрическую прогрессию?

Задание 24.3.
Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1512, и
а) пять;
б) четыре;
в) три из них образуют геометрическую прогрессию?

III) Карточки и доски

Задание 25.1.
На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 363. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.
б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 2 раза больше, чем сумма исходных чисел?
в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

Задание 25.2.
На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 330. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.
б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 3 раза больше, чем сумма исходных чисел?
в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

Задание 25.3.

На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 264. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 2 раза больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

Задание 25.4.

На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 2376. В каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 16 заменили на число 61).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 3 раза меньше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 6 раз меньше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наименьшее возможное значение суммы получившихся чисел.

Задание 25.5.

На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 1782. В каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 16 заменили на число 61).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 3 раза меньше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 5,5 раза меньше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наименьшее возможное значение суммы получившихся чисел.

Задание 25.6.

На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 2970. В каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 16 заменили на число 61).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 3 раза меньше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 5 раз меньше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наименьшее возможное значение суммы получившихся чисел.

Задание 26.1. (ОБЗ)

На доске написано 11 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 5, а среднее арифметическое шести наибольших равно 15.

а) Может ли наименьшее из этих одиннадцати чисел равняться 3?

б) Может ли среднее арифметическое всех одиннадцати чисел равняться 9?

в) Пусть B – шестое по величине число, а S – среднее арифметическое всех одиннадцати чисел. Найдите наибольшее значение выражения S−B.

Задание 26.2. (ОБЗ)

На доске написано 11 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 7, а среднее арифметическое шести наибольших равно 16.

а) Может ли наименьшее из этих одиннадцати чисел равняться 5?

б) Может ли среднее арифметическое всех одиннадцати чисел равняться 10?

в) Пусть B – шестое по величине число, а S – среднее арифметическое всех одиннадцати чисел. Найдите наибольшее значение выражения S−B.

Задание 27.1.

Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 9, 10, 11, 19, 20, 21, 22, 30, 31, 32, 33, 41, 42, 43, 52.

Задание 27.2.

Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8, 10.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 8, 10, 15, 16, 17, 18, 23, 24, 25, 26, 31, 33, 34, 41.

Задание 27.3.

Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 9, 11, 14, 16, 18, 20, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 41.

Задание 27.4.

Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 8, 9, 10, 17, 18, 19, 20, 27, 28, 29, 30, 37, 38, 39, 47.

Задание 28.1.

На доске написано n единиц подряд. Между некоторыми из них расставляют знаки «+» и считают получившуюся сумму. Например, если было написано 10 единиц, то можно получить сумму 136: 1+1+111+11+11+1=136.

а) Можно ли получить сумму 113, если n=50?

б) Можно ли получить сумму 114, если n=50?

в) Какую наибольшую четырёхзначную сумму можно получить, если n=50?

Задание 28.2.

На доске написано n единиц подряд. Между некоторыми из них расставляют знаки «+» и считают получившуюся сумму. Например, если было написано 10 единиц, то можно получить сумму 136: 1+1+111+11+11+1=136.

а) Можно ли получить сумму 110, если $n = 56$?

б) Можно ли получить сумму 111, если $n = 56$?

в) Какую наибольшую четырёхзначную сумму можно получить, если $n = 56$?

Задание 28.3.

На доске написано n единиц подряд. Между некоторыми из них расставляют знаки «+» и считают получившуюся сумму. Например, если было написано 10 единиц, то можно получить сумму 136: 1+1+111+11+11+1=136.

а) Можно ли получить сумму 122, если $n = 59$?

б) Можно ли получить сумму 123, если $n = 59$?

в) Какую наибольшую четырёхзначную сумму можно получить, если $n = 59$?

Задание 29.

На доске написано n единиц, между некоторыми из которых поставили знаки «+» и посчитали сумму. Например, если изначально было написано n= 12 единиц, то могла получиться сумма 1+1+111+11+11+1=147

а) Могла ли сумма равняться 150, если n=60?

б) Могла ли сумма равняться 150, если n=80?

в) Чему могло равняться n, если полученная сумма равна 150?

Задание 30.1. (ОБЗ)

На доске написано n единиц подряд. Между некоторыми из них расставляют знаки «+» и считают получившуюся сумму. Например, если было написано 10 единиц, то можно получить сумму 136: 1+1+111+11+11+1=136.

а) Можно ли получить сумму 132, если n=60?

б) Можно ли получить сумму 132, если n=80?

в) Для скольких значений n можно получить сумму 132?

Задание 30.2. (ОБЗ)

На доске написано n единиц подряд. Между некоторыми из них расставляют знаки «+» и считают получившуюся сумму. Например, если было написано 10 единиц, то можно получить сумму 136: 1+1+111+11+11+1=136.

а) Можно ли получить сумму 141, если n=60?

б) Можно ли получить сумму 141, если n=80?

в) Для скольких значений n можно получить сумму 141?

Задание 31.1.

На доске написано более 27, но менее 45 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно −5, среднее арифметическое всех положительных из них равно 9, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно −18.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Задание 31.2.
На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно −3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно −8.

а) Сколько чисел написано на доске?
б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?
в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Задание 32.1. (ОБЗ)
На доске написано 30 натуральных чисел (числа могут повторяться), каждое из которых либо зелёного, либо красного цвета. Каждое зелёное число кратно 3, а каждое красное число кратно 7. При этом все зелёные числа различны и все красные различны (какое-то зелёное число может равняться какому-то красному числу).

а) Может ли сумма написанных чисел быть меньше $1395=3+6+...+90$, если все числа на доске кратны 3?
б) Может ли ровно одно число на доске быть красным, если сумма написанных чисел равна 1067?
в) Какое наименьшее количество красных чисел может быть на доске, если сумма написанных чисел равна 1067?

Задание 32.2. (ОБЗ)
На доске написано 30 натуральных чисел (числа могут повторяться), каждое из которых либо зелёного, либо красного цвета. Каждое зелёное число кратно 3, а каждое красное число кратно 8. При этом все зелёные числа различны и все красные различны (какое-то зелёное число может равняться какому-то красному числу).

а) Может ли сумма написанных чисел быть меньше $1395=3+6+...+90$, если все числа на доске кратны 3?
б) Может ли ровно одно число на доске быть красным, если сумма написанных чисел равна 1066?
в) Какое наименьшее количество красных чисел может быть на доске, если сумма написанных чисел равна 1066?

Задание 33.1. (ОБЗ)
На доске написано 10 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 5, а среднее арифметическое шести наибольших равно 15.

а) Может ли наименьшее из этих десяти чисел равняться 3?
б) Может ли среднее арифметическое всех десяти чисел равняться 11?
в) Найдите наибольшее значение среднего арифметического всех десяти чисел.

Задание 33.2. (ОБЗ)
На доске написано 10 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 7, а среднее арифметическое шести наибольших равно 21.

а) Может ли наименьшее из этих десяти чисел равняться 5?
б) Может ли среднее арифметическое всех десяти чисел равняться 16?
в) Найдите наибольшее значение среднего арифметического всех десяти чисел.

Задание 34.1. (ОБЗ)
На доске написано 10 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 6, а среднее арифметическое шести наибольших равно 12.

а) Может ли наибольшее из этих десяти чисел равняться 14?
б) Может ли среднее арифметическое всех десяти чисел равняться 8,4?
в) Найдите наименьшее значение среднего арифметического всех десяти чисел.

Задание 34.2. (ОБЗ)
На доске написано 11 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 8, а среднее арифметическое семи наибольших равно 14.

а) Может ли наибольшее из этих одиннадцати чисел равняться 16?
б) Может ли среднее арифметическое всех одиннадцати чисел равняться 10?
в) Найдите наименьшее значение среднего арифметического всех одиннадцати чисел.

Задание 35.1. (ОБЗ)
На доске написано 30 различных натуральных чисел, десятичная запись каждого из которых оканчивается или на цифру 2, или на цифру 6. Сумма написанных чисел равна 2454.

а) Может ли на доске быть поровну чисел, оканчивающихся на 2 и на 6?
б) Может ли ровно одно число на доске оканчиваться на 6?
в) Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 6, может быть на доске?

Задание 35.2. (ОБЗ)
На доске написано 30 различных натуральных чисел, каждое из которых либо четное, либо его десятичная запись заканчивается на цифру 3. Сумма написанных чисел равна 793.

а) Может ли на доске быть 23 чётных числа?
б) Может ли на доске быть 1 число, оканчивающееся на 3?
в) Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 3, может быть на доске?

Задание 35.3. (ОБЗ)
На доске написано 30 различных натуральных чисел, каждое из которых либо чётное, либо его десятичная запись оканчивается на цифру 7. Сумма написанных чисел равна 810.

а) Может ли на доске быть ровно 24 чётных числа?
б) Могут ли ровно два числа на доске оканчиваться на 7?
в) Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 7, может быть на доске?

Задание 35.4. (ОБЗ)
На доске написано 30 различных натуральных чисел, каждое или оканчивается на 9, или четное, а сумма чисел равна 877.

а) Может ли быть на доске 27 четных чисел?
б) Может ли быть на доске ровно два числа, оканчивающихся на 9?
в) Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 9, может быть на доске?

Задание 36.1.
Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор -9, -6, -4, -3, -1, 2, 5. Какие числа были задуманы?
б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 5 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?
в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

Задание 36.2.
Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор -13, -8, -6, -5, -1, 2, 7. Какие числа были задуманы?
б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 7 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?
в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

Задание 36.3.

Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор $-11, -7, -5, -4, -1, 2, 6$. Какие числа были задуманы?

б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 4 раза. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

Задание 36.4.

Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор $-6, -4, -3, -2, -1, 1, 3$. Какие числа были задуманы?

б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 6 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

Задание 36.5.

Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор $-8, -5, -4, -3, -1, 1, 4$. Какие числа были задуманы?

б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 2 раза. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

Задание 36.6.
Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор − 5, − 2, 1, 3, 4, 6, 9. Какие числа были задуманы?
б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 6 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?
в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

Задание 36.7.
Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор − 3, − 1, 1, 2, 3, 4, 6. Какие числа были задуманы?
б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 5 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?
в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

Задание 36.8.
Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор − 6, − 2, 1, 4, 5, 7, 11. Какие числа были задуманы?
б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 7 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?
в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

Задание 37.1. (ОБЗ)
На доске написано 100 различных натуральных чисел, сумма которых равна 5120.

а) Может ли оказаться, что на доске написано число 230?
б) Может ли оказаться, что на доске нет числа 14?
в) Какое наименьшее количество чисел, кратных 14, может быть на доске?

Задание 37.2. (ОБЗ)
На доске написано 100 различных натуральных чисел, сумма которых равна 5100.

а) Может ли оказаться, что на доске написано число 250?
б) Может ли оказаться, что на доске нет числа 11?
в) Какое наименьшее количество чисел, кратных 11, может быть на доске?

Задание 38.1.
На доске было написано 30 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Среднее арифметическое написанных чисел равнялось 7. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньшее первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 1, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 14?
б) Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 12, но меньше 13?
в) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

Задание 38.2.
На доске было написано 30 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых больше 4, то не превосходит 44. Среднее арифметическое написанных чисел равнялось 11. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньшее первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 3, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 16?
б) Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 14, но меньше 15?
в) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

Задание 39.1.
На доске написано 10 неотрицательных чисел. За один ход стираются два числа, а вместо них записывается их сумма, округлённая до целого числа (например, вместо 5,5 и 3 записывается 9; а вместо 3,3 и 5 записывается 8).

а) Приведите пример 10 нецелых чисел и последовательности 9 ходов, после которых на доске будет записано число, равное сумме исходных чисел.
б) Может ли после 9 ходов на доске быть написано число, отличающееся от суммы исходных чисел на 7?
в) На какое наибольшее число могут отличаться числа, записанные на доске после 9 ходов, выполненных с одним и тем же набором исходных чисел в различном порядке?

Задание 39.2.
На доске написано 8 неотрицательных чисел. За один ход стираются два числа, а вместо них записывается их сумма, округлённая до целого числа (например, вместо 5,5 и 3 записывается 9; а вместо 3,3 и 5 записывается 8).

а) Приведите пример 8 нецелых чисел и последовательности 7 ходов, после которых на доске будет записано число, равное сумме исходных чисел.
б) Может ли после 7 ходов на доске быть написано число, отличающееся от суммы исходных чисел на 5?
в) На какое наибольшее число могут отличаться числа, записанные на доске после 7 ходов, выполненных с одним и тем же набором исходных чисел в различном порядке?

Задание 40.1. (ОБЗ)
На доске было написано несколько различных натуральных чисел. Эти числа разбили на три группы, в каждой из которых оказалось хотя бы одно число. К каждому числу из первой группы приписали справа цифру 6, к каждому числу из второй группы – цифру 9, а числа из третьей группы оставили без изменений.

а) Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 9 раз?
б) Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 19 раз?
в) В какое наибольшее число раз могла увеличиться сумма всех этих чисел?

Задание 40.2. (ОБЗ)
На доске было написано несколько различных натуральных чисел. Эти числа разбили на три группы, в каждой из которых оказалось хотя бы одно число. К каждому числу из первой группы приписали справа цифру 3, к каждому числу из второй группы – цифру 7, а числа из третьей группы оставили без изменений.

а) Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 8 раз?
б) Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 17 раз?
в) В какое наибольшее число раз могла увеличиться сумма всех этих чисел?

Задание 41.1. (ОБЗ)
На доске было написано несколько различных натуральных чисел. Эти числа разбили на три группы, в каждой из которых оказалось хотя бы одно число. К каждому числу из первой группы приписали справа цифру 1, к каждому числу из второй группы – цифру 8, а числа из третьей группы оставили без изменений.

а) Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 4 раза?
б) Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 18 раз?
в) Сумма всех этих чисел увеличилась в 11 раз. Какое наибольшее количество чисел могло быть написано на доске?

Задание 41.2. (ОБЗ)
На доске было написано несколько различных натуральных чисел. Эти числа разбили на три группы, в каждой из которых оказалось хотя бы одно число. К каждому числу из первой группы приписали справа цифру 4, к каждому числу из второй группы – цифру 7, а числа из третьей группы оставили без изменений.

а) Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 3 раза?
б) Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 17 раз?
в) Сумма всех этих чисел увеличилась в 11 раз. Какое наибольшее количество чисел могло быть написано на доске?

Задание 42.1 (ОБЗ)
На доске написано несколько различных натуральных чисел, в записи которых могут быть только цифры 4 и 9 (возможно, только одна из этих цифр).

а) Может ли сумма этих чисел быть равна 107?
б) Может ли сумма этих чисел быть равна 289?
в) Какое наименьшее количество чисел может быть на доске, если их сумма равна 3986?

Задание 42.2. (ОБЗ)
На доске написано несколько различных натуральных чисел, в записи которых могут быть только цифры 1 и 6.

а) Может ли сумма этих чисел быть равна 173?
б) Может ли сумма этих чисел быть равна 109?
в) Какое наименьшее количество чисел может быть на доске, если их сумма равна 1021?

Задание 43.1.
На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 30. За один ход разрешается стереть произвольные три числа, сумма которых больше 58 и отлична от каждой из сумм троек чисел, стёртых на предыдущих ходах.

а) Приведите пример последовательных 5 ходов.
б) Можно ли сделать 10 ходов?
в) Какое наибольшее число ходов можно сделать?

Задание 43.2.
На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 30. За один ход разрешается стереть произвольные три числа, сумма которых меньше 35 и отлична от каждой из сумм троек чисел, стёртых на предыдущих ходах.

а) Приведите пример последовательных 5 ходов.
б) Можно ли сделать 10 ходов?
в) Какое наибольшее число ходов можно сделать?

Задание 44.1. (ОБЗ)
В течение n дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество меньше, чем в предыдущий день.
а) Может ли n быть больше 6?
б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 2, а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни, быть больше 4?
в) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 5. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел, записанных за все дни?

Задание 44.2. (ОБЗ)
В течение n дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество меньше, чем в предыдущий день.
а) Может ли n быть больше 5?
б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 3, а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни, быть больше 4?
в) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 6. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел, записанных за все дни?

Задание 45.1. (ОБЗ)
Ваня написал на доске трёхзначное число A. Петя переписал это число A, вычеркнул из него одну цифру и получил двузначное число B. Коля тоже переписал это число A, вычеркнул из него одну цифру (возможно, ту же самую, что и Петя) и получил двузначное число C.
а) Может ли быть верным равенство $A=B\cdot C$, если $A>150$?
б) Может ли быть верным равенство $A=B\cdot C$, если $540\le A<600$?
в) Найдите наибольшее число A, для которого может быть верным равенство $A=B\cdot C$.

Задание 45.2. (ОБЗ)
Ваня написал на доске трёхзначное число A. Петя переписал это число A, вычеркнул из него одну цифру и получил двузначное число B. Коля тоже переписал это число A, вычеркнул из него одну цифру (возможно, ту же самую, что и Петя) и получил двузначное число C.
а) Может ли быть верным равенство $A=B\cdot C$, если $A>140$?
б) Может ли быть верным равенство $A=B\cdot C$, если $440\le A<500$?
в) Найдите наибольшее число A, для которого может быть верным равенство $A=B\cdot C$.

Задание 46.1.
На доске было написано 20 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Вместо некоторых из чисел (возможно, одного) на доске написали числа, меньшие первоначальных на единицу. Числа, которые после этого оказались равными 0, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел на доске увеличилось?
б) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться равным 34?
в) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

Задание 46.2.
На доске было написано 15 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 30. Вместо некоторых из чисел (возможно, одного) на доске написали числа, меньшие первоначальных на единицу. Числа, которые после этого оказались равными 0, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел на доске увеличилось?
б) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 25. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться равным 32?
в) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 25. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

Задание 47.1.
Про некоторый набор, состоящий из 11 различных натуральных чисел, известно, что сумма любых двух различных чисел этого набора меньше суммы любых трёх различных чисел этого набора.

а) Может ли одним из этих чисел быть число 3000?
б) Может ли одним из этих чисел быть число 16?
в) Какое наименьшее возможное значение может принимать сумма чисел такого набора?

Задание 47.2.
Про некоторый набор, состоящий из 10 различных натуральных чисел, известно, что сумма любых двух различных чисел этого набора меньше суммы любых трёх различных чисел этого набора.

а) Может ли одним из этих чисел быть число 1 000 000?
б) Может ли одним из этих чисел быть число 14?
в) Какое наименьшее возможное значение может принимать сумма чисел такого набора?

Задание 48.1.

На доске написаны числа 2 и 3. За один ход два числа a и b, записанные на доске, заменяются на два числа: или $a+b$ и $2a-1$, или $a+b$ и $2b-1$ (например, из чисел 2 и 3 можно получить либо 3 и 5, либо 5 и 5).

а) Приведите пример последовательности ходов, после которых одно из двух чисел, написанных на доске, окажется числом 19.

б) Может ли после 100 ходов одно из двух чисел, написанных на доске, оказаться числом 200?

в) Сделали 1007 ходов, причём на доске никогда не было написано одновременно двух равных чисел. Какое наименьшее значение может принимать разность большего и меньшего из полученных чисел?

Задание 48.2.

На доске написаны числа 2 и 3. За один ход два числа a и b, записанные на доске, заменяются на два числа: или $a+b$ и $2a-1$, или $a+b$ и $2b-1$ (например, из чисел 2 и 3 можно получить либо 3 и 5, либо 5 и 5).

а) Приведите пример последовательности ходов, после которых одно из двух чисел, написанных на доске, окажется числом 15.

б) Может ли после 50 ходов одно из двух чисел, написанных на доске, оказаться числом 100?

в) Сделали 2015 ходов, причём на доске никогда не было написано одновременно двух равных чисел. Какое наименьшее значение может принимать разность большего и меньшего из полученных чисел?

Задание 49.1.

Имеется 10 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел 1, − 2, − 3, 4, − 5, 7, − 8, 9, 10, − 11. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел 1, − 2, − 3, 4, − 5, 7, − 8, 9, 10, − 11. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные десять сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

Задание 49.2.

Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел 1, –2, –3, 4, –5, 7, –8, 9. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел 1, –2, –3, 4, –5, 7, –8, 9. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

Задание 50.1.
Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16 произвольно делят на три группы так, чтобы в каждой группе было хотя бы одно число. Затем вычисляют значение среднего арифметического чисел в каждой из групп (для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу).

а) Могут ли быть одинаковыми два из этих трёх значений средних арифметических в группах из разного количества чисел?
б) Могут ли быть одинаковыми все три значения средних арифметических?
в) Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из получаемых трёх средних арифметических.

Задание 50.2.
Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 12 произвольно делят на три группы так, чтобы в каждой группе было хотя бы одно число. Затем вычисляют значение среднего арифметического чисел в каждой из групп (для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу).

а) Могут ли быть одинаковыми два из этих трёх значений средних арифметических в группах из разного количества чисел?
б) Могут ли быть одинаковыми все три значения средних арифметических?
в) Найдите наибольшее возможное значение наименьшего из получаемых трёх средних арифметических.

З**адание 51.1.** (Демо)
На доске написано 10 натуральных чисел, среди которых нет одинаковых. Оказалось, что среднее арифметическое любых четырёх или пяти чисел из записанных является целым числом.

а) Могут ли среди записанных на доске чисел одновременно быть числа 403 и 2013?
б) Может ли одно из записанных на доске чисел быть квадратом натурального числа, если среди записанных на доске чисел есть число 403?
в) Известно, что среди записанных на доске чисел есть число 1 и квадрат n^2 натурального числа n, большего 1. Найдите наименьшее возможное значение n.

Задание 51.2. (Демо)
На доске написано 10 различных натуральных чисел, среди которых нет одинаковых. Оказалось, что среднее арифметическое любых пяти или шести чисел является целым числом.

а) Могут ли среди записанных на доске чисел одновременно быть числа 602 и 1512?
б) Может ли одно из записанных на доске чисел быть квадратом натурального числа, если среди записанных на доске чисел есть число 602?
в) Известно, что среди записанных на доске чисел есть число 1 и квадрат n^2 натурального числа n, большего 1. Найдите наименьшее возможное значение n.

Задание 52.1.
Натуральные числа от 1 до 12 разбивают на четыре группы, в каждой из которых есть по крайней мере два числа. Для каждой группы находят сумму чисел этой группы. Для каждой пары групп находят модуль разности найденных сумм и полученные 6 чисел складывают.

а) Может ли в результате получиться 0?
б) Может ли в результате получиться 1?
в) Каково наименьшее возможное значение полученного результата?

Задание 52.2.
Натуральные числа от 1 до 20 разбивают на четыре группы, в каждой из которых есть по крайней мере два числа. Для каждой группы находят сумму чисел этой группы. Для каждой пары групп находят модуль разности найденных сумм и полученные 6 чисел складывают.

а) Может ли в результате получиться 0?
б) Может ли в результате получиться 1?
в) Каково наименьшее возможное значение полученного результата?

Задание 53.1.
Для набора 40 различных натуральных чисел выполнено, что сумма любых двух чисел из этого набора меньше суммы любых четырёх чисел из этого набора.

а) Может ли одним из этих чисел быть число 777?
б) Может ли одним из этих чисел быть число 33?
в) Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел этого набора?

Задание 53.2.
Для набора 30 различных натуральных чисел выполнено, что сумма любых трёх чисел из этого набора меньше суммы любых четырёх чисел из этого набора.

а) Может ли одним из этих чисел быть число 999?
б) Может ли одним из этих чисел быть число 66?
в) Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел этого набора?

Задание 54.1. (ОБЗ)
На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 60 и меньше 140.

а) Может ли на доске быть 5 чисел?
б) Может ли на доске быть 6 чисел?
в) Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел на доске, если их четыре?

Задание 54.2. (ОБЗ)
На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 45 и меньше 120.

а) Может ли на доске быть 5 чисел?
б) Может ли на доске быть 6 чисел?
в) Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел на доске, если их четыре?

Задание 54.3. (ОБЗ)
На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 40 и меньше 100.

а) Может ли на доске быть 5 чисел?
б) Может ли на доске быть 6 чисел?
в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на доске, если их четыре?

Задание 54.4. (ОБЗ)
На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 25 и меньше 85.

а) Может ли на доске быть 5 чисел?
б) Может ли на доске быть 6 чисел?
в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на доске, если их четыре?

Задание 55.1. (ОБЗ)
Тройку различных натуральных чисел назовём удачной, если любое число в ней хотя бы на 5 больше, чем треть суммы двух других чисел. Например, 40, 45, 50 – удачная тройка.
а) Сколько существует удачных троек, содержащих числа 50, 60 и ещё одно число, большее 60?
б) Найдётся ли удачная тройка, одно из чисел которой равно 15?
в) Какое наибольшее количество чисел от 1 до 100 включительно можно расставить по кругу так, чтобы каждое число встречалось не более одного раза и любые три подряд идущих числа образовывали удачную тройку?

Задание 55.2. (ОБЗ)
Тройку различных натуральных чисел назовём удачной, если любое число в ней хотя бы на 8 больше, чем треть суммы двух других чисел. Например, 50, 60, 70 – удачная тройка.
а) Сколько существует удачных троек, содержащих числа 60, 70 и ещё одно число, большее 70?
б) Найдётся ли удачная тройка, одно из чисел которой равно 24?
в) Какое наибольшее количество чисел от 1 до 100 включительно можно расставить по кругу так, чтобы каждое число встречалось не более одного раза и любые три подряд идущих числа образовывали удачную тройку?

Задание 56.1.
Множество чисел назовём *хорошим*, если его можно разбить на два подмножества с одинаковым произведением чисел.

а) Является ли множество $\{100; 101; 102; \ldots; 199\}$ *хорошим*?
б) Является ли множество $\{2; 4; 8; \ldots; 2^{200}\}$ *хорошим*?
в) Сколько *хороших* четырёхэлементных подмножеств у множества $\{1; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 11; 12\}$?

Задание 56.2.
Множество чисел назовём *хорошим*, если его можно разбить на два подмножества с одинаковым произведением чисел.

а) Является ли множество $\{200; 201; 202; \ldots; 299\}$ *хорошим*?
б) Является ли множество $\{2; 4; 8; \ldots; 2^{100}\}$ *хорошим*?
в) Сколько *хороших* четырёхэлементных подмножеств у множества $\{1; 2; 4; 6; 7; 9; 13; 17; 18\}$?

Задание 56.3.
Множество чисел назовём *хорошим*, если его можно разбить на два подмножества с одинаковой суммой чисел.
а) Является ли множество $\{100; 101; 102; \ldots; 199\}$ *хорошим*?
б) Является ли множество $\{2; 4; 8; \ldots; 2^{200}\}$ *хорошим*?
в) Сколько *хороших* четырёхэлементных подмножеств у множества $\{3; 4; 5; 6; 8; 10; 12\}$?

Задание 56.4.
Множество чисел назовём *хорошим*, если его можно разбить на два подмножества с одинаковой суммой чисел.
а) Является ли множество $\{100; 101; 102; \ldots; 199\}$ *хорошим*?
б) Является ли множество $\{2; 4; 8; \ldots; 2^{200}\}$ *хорошим*?
в) Сколько *хороших* четырёхэлементных подмножеств у множества $\{1; 2; 4; 5; 7; 9; 11\}$?

Задание 57.1.
На окружности некоторым образом расставили натуральные числа от 7 до 27 (каждое число поставлено по одному разу). Затем для каждой пары соседних чисел нашли разность большего и меньшего.

а) Могли ли все полученные разности быть не меньше 11?
б) Могли ли все полученные разности быть не меньше 10?
в) Помимо полученных разностей, для каждой пары чисел, стоящих через одно, нашли разность большего и меньшего. Для какого наибольшего целого числа k можно так расставить числа, чтобы все разности были не меньше k?

Задание 57.2.
На окружности некоторым образом расставили натуральные числа от 1 до 27 (каждое число поставлено по одному разу). Затем для каждой пары соседних чисел нашли разность большего и меньшего.

а) Могли ли все полученные разности быть не меньше 14?
б) Могли ли все полученные разности быть не меньше 13?
в) Помимо полученных разностей, для каждой пары чисел, стоящих через одно, нашли разность большего и меньшего. Для какого наибольшего целого числа k можно так расставить числа, чтобы все разности были не меньше k?

Задание 57.3.
На окружности некоторым образом расставили натуральные числа от 1 до 21 (каждое число поставлено по одному разу). Затем для каждой пары соседних чисел нашли разность большего и меньшего.

а) Могли ли все полученные разности быть не меньше 11?
б) Могли ли все полученные разности быть не меньше 10?
в) Помимо полученных разностей, для каждой пары чисел, стоящих через одно, нашли разность большего и меньшего. Для какого наибольшего целого числа k можно так расставить числа, чтобы все разности были не меньше k?

Задание 57.4.
На окружности некоторым образом расставили натуральные числа от 4 до 30 (каждое число поставлено по одному разу). Затем для каждой пары соседних чисел нашли разность большего и меньшего.

а) Могли ли все полученные разности быть не меньше 14?
б) Могли ли все полученные разности быть не меньше 13?
в) Помимо полученных разностей, для каждой пары чисел, стоящих через одно, нашли разность большего и меньшего. Для какого наибольшего целого числа k можно так расставить числа, чтобы все разности были не меньше k?

Задание 58.1. (ОБЗ)
По кругу расставлено N различных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 365. Сумма любых четырёх идущих подряд чисел делится на 4, а сумма любых трёх идущих подряд чисел нечётна.

а) Может ли N быть равным 200?
б) Может ли N быть равным 109?
в) Найдите наибольшее значение N.

Задание 58.2. (ОБЗ)
По кругу расставлено N различных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 400. Сумма любых четырёх идущих подряд чисел делится на 3, а сумма любых трёх идущих подряд чисел не делится на 3.

а) Может ли N быть равным 360?
б) Может ли N быть равным 149?
в) Найдите наибольшее значение N.

Задание 58.3. (ОБЗ)
По кругу расставлено N различных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 425. Сумма любых четырёх идущих подряд чисел делится на 4, а сумма любых трёх идущих подряд чисел нечётна.
а) Может ли N быть равным 280?
б) Может ли N быть равным 149?
в) Найдите наибольшее значение N.

Задание 58.4. (ОБЗ)
По кругу расставлено N различных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 340. Сумма любых четырёх идущих подряд чисел делится на 3, а сумма любых трёх идущих подряд чисел не делится на 3.
а) Может ли N быть равным 240?
б) Может ли N быть равным 129?
в) Найдите наибольшее значение N.

Задание 59.1. (ОБЗ)
По окружности в некотором порядке расставлены натуральные числа от 1 до 12. Между каждыми двумя соседними числами написали модуль их разности. Затем исходные числа стёрли.
а) Приведите пример расстановки, когда сумма полученных чисел равна 32.
б) Может ли сумма полученных чисел быть равна 29?
в) Какое наибольшее значение может принимать сумма полученных чисел?

Задание 59.2. (ОБЗ)
По окружности в некотором порядке расставлены натуральные числа от 1 до 14. Между каждыми двумя соседними числами написали модуль их разности. Затем исходные числа стёрли.
а) Приведите пример расстановки, когда сумма полученных чисел равна 38.
б) Может ли сумма полученных чисел быть равна 33?
в) Какое наибольшее значение может принимать сумма полученных чисел?

Задание 60.1.
Три числа назовём *хорошей* тройкой, если они могут быть длинами сторон треугольника. Три числа назовём *отличной* тройкой, если они могут быть длинами сторон прямоугольного треугольника.
а) Даны 5 различных натуральных чисел. Может ли оказаться, что среди них не найдётся ни одной хорошей тройки?
б) Даны 4 различных натуральных числа. Может ли оказаться, что среди них можно найти три отличных тройки?
в) Даны 10 различных чисел (необязательно натуральных). Какое наибольшее количество отличных троек могло оказаться среди них?

Задание 60.2.
Три числа назовём *хорошей* тройкой, если они могут быть длинами сторон треугольника. Три числа назовём *отличной* тройкой, если они могут быть длинами сторон прямоугольного треугольника.
а) Даны 8 различных натуральных чисел. Может ли оказаться, что среди них не найдётся ни одной хорошей тройки?
б) Даны 4 различных натуральных числа. Может ли оказаться, что среди них можно найти три отличных тройки?
в) Даны 12 различных чисел (необязательно натуральных). Какое наибольшее количество отличных троек могло оказаться среди них?

IV) Другие задачи

Задание 61.1. (ОБЗ)
Есть три коробки: в первой коробке 97 камней, во второй – 104, а в третьей коробке камней нет. За один ход берут по одному камню из любых двух коробок и кладут в оставшуюся. Сделали некоторое количество таких ходов.
а) Могло ли в первой коробке оказаться 97 камней, во второй – 89, а в третьей – 15?
б) Мог ли в третьей коробке оказаться 201 камень?
в) В первой коробке оказался 1 камень. Какое наибольшее число камней могло оказаться в третьей коробке?

Задание 61.2. (ОБЗ)
Есть три коробки: в первой коробке 64 камня, во второй – 77, а в третьей коробке камней нет. За один ход берут по одному камню из любых двух коробок и кладут в оставшуюся. Сделали некоторое количество таких ходов.
а) Могло ли в первой коробке оказаться 64 камня, во второй – 59, а в третьей – 18?
б) Мог ли в третьей коробке оказаться 141 камень?
в) В первой коробке оказался 1 камень. Какое наибольшее число камней могло оказаться в третьей коробке?

Задание 62.1. (ОБЗ)
Есть четыре коробки: в первой коробке 101 камень, во второй – 102, в третьей – 103, а в четвёртой коробке камней нет. За один ход берут по одному камню из любых трёх коробок и кладут в оставшуюся. Сделали некоторое количество таких ходов.
а) Могло ли в первой коробке оказаться 97 камней, во второй – 102, в третьей – 103, а в четвёртой – 4?
б) Могло ли в четвёртой коробке оказаться 306 камней?
в) Какое наибольшее число камней могло оказаться в первой коробке?

Задание 62.2. (ОБЗ)
Есть четыре коробки: в первой коробке 121 камень, во второй – 122, в третьей – 123, а в четвёртой коробке камней нет. За один ход берут по одному камню из любых трёх коробок и кладут в оставшуюся. Сделали некоторое количество таких ходов.
а) Могло ли в первой коробке оказаться 121 камень, во второй – 122, в третьей – 119, а в четвёртой – 4?
б) Могло ли в четвёртой коробке оказаться 366 камней?
в) Какое наибольшее число камней могло оказаться в первой коробке?

Задание 63.1. (ОБЗ)
Есть 16 монет по 2 рубля и 29 монет по 5 рублей.
а) Можно ли этими монетами набрать сумму 175 рублей?
б) Можно ли этими монетами набрать сумму 176 рублей?
в) Какое наименьшее количество монет, каждая по 1 рублю, нужно добавить, чтобы иметь возможность набрать любую целую сумму от 1 рубля до 180 рублей включительно?

Задание 63.2. (ОБЗ)
Есть 24 монеты по 2 рубля и 30 монет по 5 рублей.
а) Можно ли этими монетами набрать сумму 196 рублей?
б) Можно ли этими монетами набрать сумму 197 рублей?
в) Какое наименьшее количество монет, каждая по 1 рублю, нужно добавить, чтобы иметь возможность набрать любую целую сумму от 1 рубля до 200 рублей включительно?

Задание 64.1. (ОБЗ)
В классе больше 10, но не больше 26 учащихся, а доля девочек не превышает 21 %.
а) Может ли в этом классе быть 5 девочек?
б) Может ли доля девочек составить 30 %, если в этот класс придёт новая девочка?
в) В этот класс пришла новая девочка. Доля девочек в классе составила целое число процентов. Какое наибольшее число процентов может составить доля девочек в классе?

Задание 64.2. (ОБЗ)
В классе больше 10, но не больше 26 учащихся, а доля девочек не превышает 46 %.
а) Может ли в этом классе быть 9 девочек?
б) Может ли доля девочек составить 55 %, если в этот класс придёт новая девочка?
в) В этот класс пришла новая девочка. Доля девочек в классе составила целое число процентов. Какое наибольшее число процентов может составить доля девочек в классе?

Задание 65.1.
Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{4}{13}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 10 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?
б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?
в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов *а* и *б*?

Задание 65.2.
Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{3}{13}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{2}{7}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 7 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?
б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?
в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов *а* и *б*?

Задание 65.3.
Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{3}{11}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{3}{7}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 10 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?
б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?
в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов *а* и *б*?

Задание 65.4.
Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{2}{11}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.
а) Могло ли быть в группе 9 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?
б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?
в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а и б?

Задание 66.1.
На сайте проводится опрос, кого из футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста – доля голосов, отданных за него, в процентах, округлённая до целого числа. Например, числа 9,3, 10,5 и 12,7 округляются до 9, 11 и 13 соответственно.
а) Всего проголосовало 15 посетителей сайта. Мог ли рейтинг некоторого футболиста быть равным 41?
б) Пусть посетители сайта отдавали голоса за одного из трёх футболистов. Могло ли быть так, что все три футболиста получили разное число голосов, но их рейтинги одинаковы?
в) На сайте отображалось, что рейтинг некоторого футболиста равен 3. Это число не изменилось и после того, как Вася отдал свой голос за этого футболиста. При каком наименьшем числе отданных за всех футболистов голосов, включая Васин голос, такое возможно?

Задание 66.2.
На сайте проводится опрос, кого из футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста – доля голосов, отданных за него, в процентах, округлённая до целого числа. Например, числа 9,3, 10,5 и 12,7 округляются до 9, 11 и 13 соответственно.
а) Всего проголосовало 13 посетителей сайта. Мог ли рейтинг некоторого футболиста быть равным 29?
б) Пусть посетители сайта отдавали голоса за одного из трёх футболистов. Могла ли сумма рейтингов быть больше 100?
в) На сайте отображалось, что рейтинг некоторого футболиста равен 7. Это число не изменилось и после того, как Вася отдал свой голос за этого футболиста. При каком наименьшем числе отданных за всех футболистов голосов, включая Васин голос, такое возможно?

Задание 66.3.

На сайте проводится опрос, кого из футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста – доля голосов, отданных за него, в процентах, округлённая до целого числа. Например, числа 9,3, 10,5 и 12,7 округляются до 9, 11 и 13 соответственно.

а) Всего проголосовало 15 посетителей сайта, и рейтинг некоторого футболиста был равен 47. Увидев это, Вася отдал свой голос за этого футболиста. Чему теперь равен рейтинг этого футболиста?

б) Пусть посетители сайта отдавали голоса за одного из трёх футболистов. Могла ли сумма рейтингов быть меньше 100?

в) На сайте отображалось, что рейтинг некоторого футболиста равен 6. После того, как Вася отдал свой голос за этого футболиста, его рейтинг на сайте стал равен 8. При каком наибольшем числе отданных за всех футболистов голосов, включая Васин голос, такое возможно?

Задание 66.4.

На сайте проводится опрос, кого из футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста – доля голосов, отданных за него, в процентах, округленная до целого числа. Например, числа 7,2; 9,5 и 11,8 округляются до 7; 10 и 12 соответственно.

а) Всего проголосовало 14 посетителей сайта, и рейтинг первого футболиста стал равен 36. Увидев это, Вася отдал свой голос за этого футболиста. Чему теперь равен рейтинг первого футболиста?

б) Пусть посетители сайта отдавали голоса за одного из трех футболистов. Могла ли сумма рейтингов быть больше 100?

в) На сайте отображалось, что рейтинг некоторого футболиста равен 9. Это число не изменилось и после того, как Вася отдал свой голос за этого футболиста. При каком наименьшем числе отданных за всех футболистов голосов, включая Васин голос, такое возможно?

Задание 67.1.

На сайте проводится опрос, кого из 146 футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста – доля голосов, отданных за него, в процентах, округлённая до целого числа. Например, числа 9,3, 10,5 и 12,7 округляются до 9, 11 и 13 соответственно.

а) Всего проголосовало 13 посетителей сайта, и рейтинг первого футболиста стал равен 31. Увидев это, Вася отдал свой голос за другого футболиста. Чему теперь равен рейтинг первого футболиста?

б) Вася проголосовал за некоторого футболиста. Могла ли после этого сумма рейтингов всех футболистов уменьшиться на 140 или больше?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма рейтингов всех футболистов?

Задание 67.2.
На сайте проводится опрос, кого из 156 футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста – доля голосов, отданных за него, в процентах, округлённая до целого числа. Например, числа 9,3, 10,5 и 12,7 округляются до 9, 11 и 13 соответственно.

а) Всего проголосовало 11 посетителей сайта, и рейтинг первого футболиста стал равен 45. Увидев это, Вася отдал свой голос за другого футболиста. Чему теперь равен рейтинг первого футболиста?
б) Вася проголосовал за некоторого футболиста. Могла ли после этого сумма рейтингов всех футболистов уменьшиться на 150 или больше?
в) Какое наибольшее значение может принимать сумма рейтингов всех футболистов?

Задание 68.1. (ОБЗ)
Есть 4 камня, каждый массой 7 тонн, и 9 камней, каждый массой 22 тонны.

а) Можно ли разложить все эти камни на две группы так, чтобы разность суммарных масс камней в этих группах составила 8 тонн?
б) Можно ли разложить все эти камни на две группы, суммарные массы камней в которых равны?
в) Все камни хотят разложить на две группы. Какое наименьшее положительное значение (в тоннах) может принимать разность суммарных масс камней в этих группах?

Задание 68.2. (ОБЗ)
Есть 4 камня, каждый массой 5 тонн, и 13 камней, каждый массой 14 тонн.

а) Можно ли разложить все эти камни на две группы так, чтобы разность суммарных масс камней в этих группах составила 6 тонн?
б) Можно ли разложить все эти камни на две группы, суммарные массы камней в которых равны?
в) Все камни хотят разложить на две группы. Какое наименьшее положительное значение (в тоннах) может принимать разность суммарных масс камней в этих группах?

Задание 69.1. (ОБЗ)
Деревянную линейку, длина которой выражается целым числом сантиметров, разрезают на куски. За один ход можно взять один или несколько кусков линейки, положить их друг на друга и разрезать каждый из них на две части, длины которых выражаются целым числом сантиметров.

а) Можно ли за четыре хода разрезать линейку длиной 16 см на куски длиной 1 см?
б) Можно ли за пять ходов разрезать линейку длиной 100 см на куски длиной 1 см?
в) Какое наименьшее число ходов нужно сделать, чтобы разрезать линейку длиной 200 см на куски длиной 1 см?

Задание 69.2. (ОБЗ)
Деревянную линейку, длина которой выражается целым числом сантиметров, разрезают на куски. За один ход можно взять один или несколько кусков линейки, положить их друг на друга и разрезать каждый из них на две части, длины которых выражаются целым числом сантиметров.

а) Можно ли за четыре хода разрезать линейку длиной 16 см на куски длиной 1 см?
б) Можно ли за пять ходов разрезать линейку длиной 100 см на куски длиной 1 см?
в) Какое наименьшее число ходов нужно сделать, чтобы разрезать линейку длиной 300 см на куски длиной 1 см?

Задание 70.1.
Ученики одной школы писали тест. Результатом каждого ученика является целое неотрицательное число баллов. Ученик считается сдавшим тест, если он набрал не менее 83 баллов. Из-за того, что задания оказались слишком трудными, было принято решение всем участникам теста добавить по 5 баллов, благодаря чему количество сдавших тест увеличилось.

а) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, не сдавших тест, понизился?
б) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, сдавших тест, понизился, и средний балл участников, не сдавших тест, тоже понизился?
в) Известно, что первоначально средний балл участников теста составил 90, средний балл участников, сдавших тест, составил 100, а средний балл участников, не сдавших тест, составил 75. После добавления баллов средний балл участников, сдавших тест, стал равен 103, а не сдавших тест – 79. При каком наименьшем числе участников теста возможна такая ситуация?

Задание 70.2.
Ученики одной школы писали тест. Результатом каждого ученика является целое неотрицательное число баллов. Ученик считается сдавшим тест, если он набрал не менее 63 баллов. Из-за того, что задания оказались слишком трудными, было принято решение всем участникам теста добавить по 4 балла, благодаря чему количество сдавших тест увеличилось.

а) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, не сдавших тест, понизился?
б) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, сдавших тест, понизился, и средний балл участников, не сдавших тест, тоже понизился?
в) Известно, что первоначально средний балл участников теста составил 70, средний балл участников, сдавших тест, составил 80, а средний балл участников, не сдавших тест, составил 55. После добавления баллов средний балл участников, сдавших тест, стал равен 82, а не сдавших тест – 58. При каком наименьшем числе участников теста возможна такая ситуация?

Задание 71.1. (ОБЗ)
В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере 2 учащихся, а суммарно тест писал 51 учащийся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы №1 в школу №2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.
а) Мог ли средний балл в школе №1 вырасти в 2 раза?
б) Средний балл в школе №1 вырос на 10%, средний балл в школе №2 также вырос на 10%. Мог ли первоначальный средний балл в школе №2 равняться 1?
в) Средний балл в школе №1 вырос на 10%, средний балл в школе №2 также вырос на 10%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе №2.

Задание 71.2. (ОБЗ)
В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере 2 учащихся, а суммарно тест писали 9 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы №1 в школу №2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.
а) Мог ли средний балл в школе №1 уменьшиться в 10 раз?
б) Средний балл в школе №1 уменьшился на 10%, средний балл в школе №2 также уменьшился на 10%. Мог ли первоначальный средний балл в школе №2 равняться 7?
в) Средний балл в школе №1 уменьшился на 10%, средний балл в школе №2 также уменьшился на 10%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе №2.

Задание 72.1. (ОБЗ)
В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере 2 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом, причём в школе №2 средний балл равнялся 42. Один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы №1 в школу №2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах. В результате средний балл в школе №1 уменьшился на 10%, средний балл в школе №2 также уменьшился на 10%.
а) Сколько учащихся могло писать тест в школе №2 изначально?
б) Каждый учащийся школы №2, писавший тест, набрал больше баллов, чем перешедший в неё учащийся школы №1. Какое наибольшее количество баллов мог набрать учащийся школы №2?
в) Какое наибольшее количество учащихся могло писать тест в школе №1 изначально?

Задание 72.2. (ОБЗ)
В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере 2 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом, причём в школе №1 средний балл равнялся 18. Один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы №1 в школу №2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах. В результате средний балл в школе №1 вырос на 10%, средний балл в школе №2 также вырос на 10%.
а) Сколько учащихся могло писать тест в школе №1 изначально?
б) В школе №1 все писавшие тест набрали разное количество баллов. Какое наибольшее количество баллов мог набрать учащийся этой школы?
в) Известно, что изначально в школе №2 писали тест более 10 учащихся. Какое наименьшее количество учащихся могло писать тест в школе №2 изначально?

Задание 73.1. (ОБЗ)
Маша и Наташа делали фотографии в течение некоторого количества подряд идущих дней. В первый день Маша сделала m фотографий, а Наташа – n фотографий. В каждый следующий день каждая из девочек делала на одну фотографию больше, чем в предыдущий день. Известно, что Наташа за всё время сделала суммарно на 1001 фотографию больше, чем Маша, и что фотографировали они больше одного дня.
а) Могли ли они фотографировать в течение 7 дней?
б) Могли ли они фотографировать в течение 8 дней?
в) Какое наибольшее суммарное число фотографий могла сделать Наташа за все дни фотографирования, если известно, что в последний день Маша сделала меньше 40 фотографий?

Задание 73.2. (ОБЗ)
Маша и Наташа делали фотографии в течение некоторого количества подряд идущих дней. В первый день Маша сделала m фотографий, а Наташа – n фотографий. В каждый следующий день каждая из девочек делала на одну фотографию больше, чем в предыдущий день. Известно, что Наташа за всё время сделала суммарно на 1615 фотографий больше, чем Маша, и что фотографировали они больше одного дня.
а) Могли ли они фотографировать в течение 5 дней?
б) Могли ли они фотографировать в течение 6 дней?
в) Какое наибольшее суммарное число фотографий могла сделать Наташа за все дни фотографирования, если известно, что в последний день Маша сделала меньше 30 фотографий?

Задание 74.1.
Имеются каменные глыбы: 50 штук по 700 кг, 60 штук по 1 000 кг и 80 штук по 1 500 кг (раскалывать глыбы нельзя).

а) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 65 грузовиках, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?
б) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 43 грузовиках, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?
в) Какое наименьшее количество грузовиков, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, понадобится, чтобы вывезти все эти глыбы одновременно, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

Задание 74.2.
Имеются каменные глыбы: 50 штук по 800 кг, 60 штук по 1 000 кг и 60 штук по 1 500 кг (раскалывать глыбы нельзя).

а) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 60 грузовиках, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?
б) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 38 грузовиках, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?
в) Какое наименьшее количество грузовиков, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, понадобится, чтобы вывезти все эти глыбы одновременно, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

Задание 75.1. (ОБЗ)
В группе поровну юношей и девушек. Юноши отправляли электронные письма девушкам. Каждый юноша отправил или 5 писем, или 16 писем, причём и тех и других юношей было не меньше двух. Возможно, что какой-то юноша отправил какой-то девушке несколько писем.

а) Могло ли оказаться так, что каждая девушка получила ровно 7 писем?
б) Какое наименьшее количество девушек могло быть в группе, если известно, что все они получили писем поровну?
в) Пусть все девушки получили попарно различное количество писем (возможно, какая-то девушка не получила писем вообще). Каково наибольшее возможное количество девушек в такой группе?

Задание 75.2. (ОБЗ)

В группе поровну юношей и девушек. Юноши отправляли электронные письма девушкам. Каждый юноша отправил или 4 письма, или 21 письмо, причём и тех и других юношей было не меньше двух. Возможно, что какой-то юноша отправил какой-то девушке несколько писем.

а) Могло ли оказаться так, что каждая девушка получила ровно 7 писем?

б) Какое наименьшее количество девушек могло быть в группе, если известно, что все они получили писем поровну?

в) Пусть все девушки получили попарно различное количество писем (возможно, какая-то девушка не получила писем вообще). Каково наибольшее возможное количество девушек в такой группе?

Задание 76.1.

В одном из заданий на конкурсе бухгалтеров требуется выдать премии сотрудникам некоторого отдела на общую сумму 600 000 рублей (размер премии каждого сотрудника – целое число, кратное 1000). Бухгалтеру дают распределение премий, и он должен их выдать без сдачи и размена, имея 100 купюр по 1000 рублей и 100 купюр по 5000 рублей.

а) Удастся ли выполнить задание, если в отделе 40 сотрудников и все должны получить поровну?

б) Удастся ли выполнить задание, если ведущему специалисту надо выдать 40 000 рублей, а остальное поделить поровну на 70 сотрудников?

в) При каком наибольшем количестве сотрудников в отделе задание удастся выполнить при любом распределении размеров премий?

Задание 76.2.

В одном из заданий на конкурсе бухгалтеров требуется выдать премии сотрудникам некоторого отдела на общую сумму 800 000 рублей (размер премии каждого сотрудника – целое число, кратное 1000). Бухгалтеру дают распределение премий, и он должен их выдать без сдачи и размена, имея 250 купюр по 1000 рублей и 110 купюр по 5000 рублей.

а) Удастся ли выполнить задание, если в отделе 40 сотрудников и все должны получить поровну?

б) Удастся ли выполнить задание, если ведущему специалисту надо выдать 80 000 рублей, а остальное поделить поровну на 80 сотрудников?

в) При каком наибольшем количестве сотрудников в отделе задание удастся выполнить при любом распределении размеров премий?

Задание 77.1. (ОБЗ)
В порту имеются только заполненные контейнеры, масса каждого из которых равна 20 тонн или 60 тонн. В некоторых из этих контейнеров находится сахарный песок. Количество контейнеров с сахарным песком составляет 25% от общего количества контейнеров.

а) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 20 % от общей массы всех контейнеров?
б) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 60 % от общей массы всех контейнеров?
в) Какую наименьшую долю (в процентах) может составить масса контейнеров с сахарным песком от общей массы всех контейнеров?

Задание 77.2. (ОБЗ)
В порту имеются только заполненные контейнеры, масса каждого из которых равна 20 тонн или 60 тонн. В некоторых из этих контейнеров находится сахарный песок. Количество контейнеров с сахарным песком составляет 75% от общего количества контейнеров.

а) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 80 % от общей массы всех контейнеров?
б) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 40 % от общей массы всех контейнеров?
в) Какую наибольшую долю (в процентах) может составить масса контейнеров с сахарным песком от общей массы всех контейнеров?

Задание 77.3. (ОБЗ)
В порту имеются только заполненные контейнеры, масса каждого из которых равна 40 тонн или 60 тонн. В некоторых контейнерах находится сахарный песок. Количество контейнеров с сахарным песком составляет 40% от общего числа контейнеров.

а) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составлять 36% от общей массы?
б) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составлять 60% от общей массы?
в) Какую наибольшую долю в процентах может составлять масса контейнеров с сахарным песком от общей массы?

Задание 77.4. (ОБЗ)
В порту имеются только заполненные контейнеры, масса каждого из которых равна 20 тонн или 40 тонн. В некоторых контейнерах находится сахарный песок. Количество контейнеров с сахарным песком составляет 60% от общего числа контейнеров.

а) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составлять 50% от общей массы?
б) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составлять 40% от общей массы?
в) Какую наибольшую долю в процентах может составлять масса контейнеров с сахарным песком от общей массы?

Задание 78.1.
Семь экспертов оценивают кинофильм. Каждый из них выставляет оценку – целое число баллов от 0 до 10 включительно. Известно, что все эксперты выставили различные оценки. По старой системе оценивания рейтинг кинофильма – это среднее арифметическое всех оценок экспертов. По новой системе оценивания рейтинг кинофильма вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и подсчитывается среднее арифметическое пяти оставшихся оценок.

а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{30}$?

б) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{35}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

Задание 78.2.
Семь экспертов оценивают кинофильм. Каждый из них выставляет оценку – целое число баллов от 1 до 15 включительно. Известно, что все эксперты выставили различные оценки. По старой системе оценивания рейтинг кинофильма – это среднее арифметическое всех оценок экспертов. По новой системе оценивания рейтинг кинофильма вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и подсчитывается среднее арифметическое пяти оставшихся оценок.

а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{2}{45}$?

б) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{2}{35}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

Задание 78.3.
Семь экспертов оценивают кинофильм. Каждый из них выставляет оценку – целое число баллов от 0 до 12 включительно. Известно, что все эксперты выставили различные оценки. По старой системе оценивания рейтинг кинофильма – это среднее арифметическое всех оценок экспертов. По новой системе оценивания рейтинг кинофильма вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и подсчитывается среднее арифметическое пяти оставшихся оценок.

а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{25}$?

б) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{35}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

Задание 78.4.
Семь экспертов оценивают кинофильм. Каждый из них выставляет оценку – целое число баллов от 0 до 12 включительно. Известно, что все эксперты выставили различные оценки. По старой системе оценивания рейтинг кинофильма – это среднее арифметическое всех оценок экспертов. По новой системе оценивания рейтинг кинофильма вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и подсчитывается среднее арифметическое пяти оставшихся оценок.

а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{20}$?

б) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{24}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.