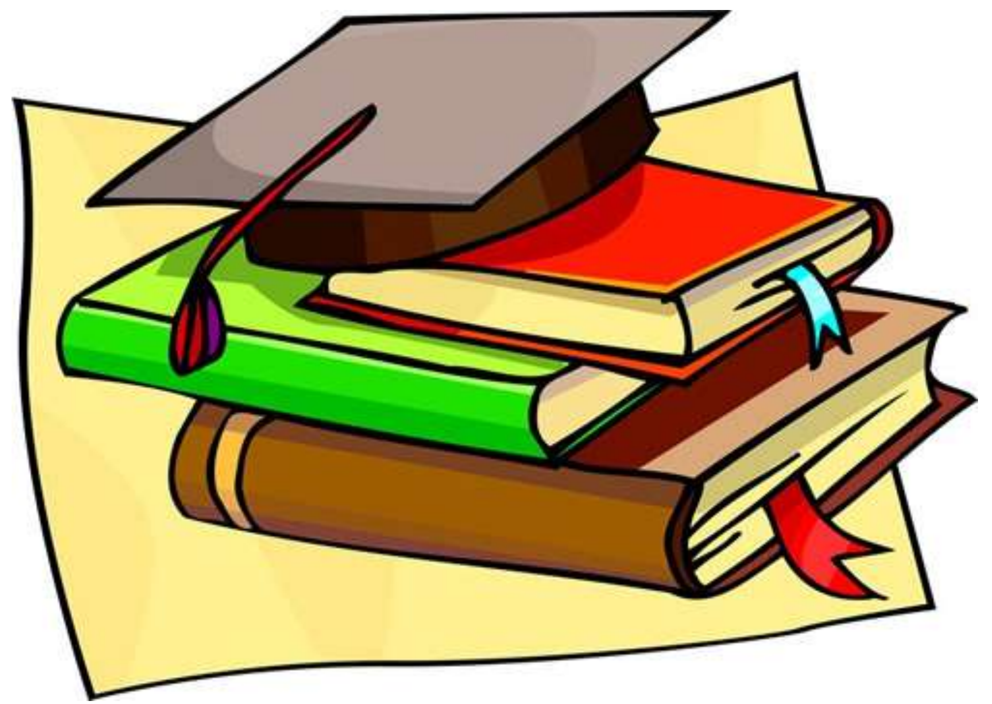
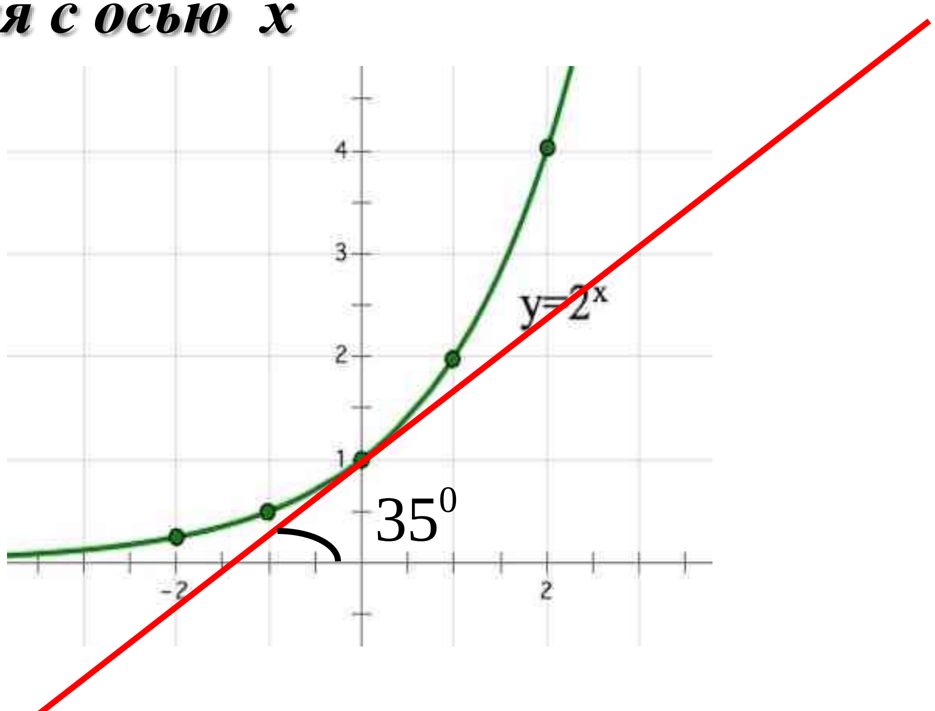
Дифференцирование показательной и логарифмической функций



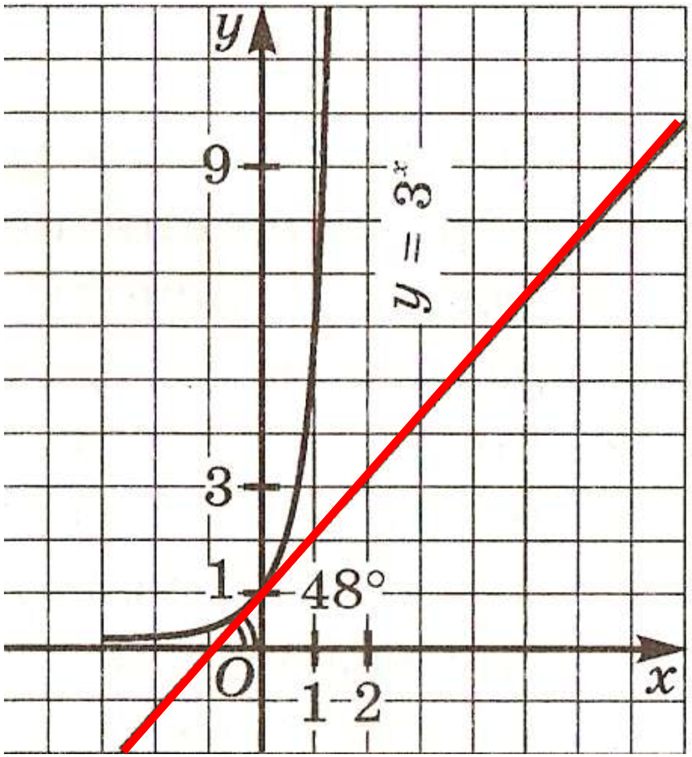
mathvideourok.moy.su

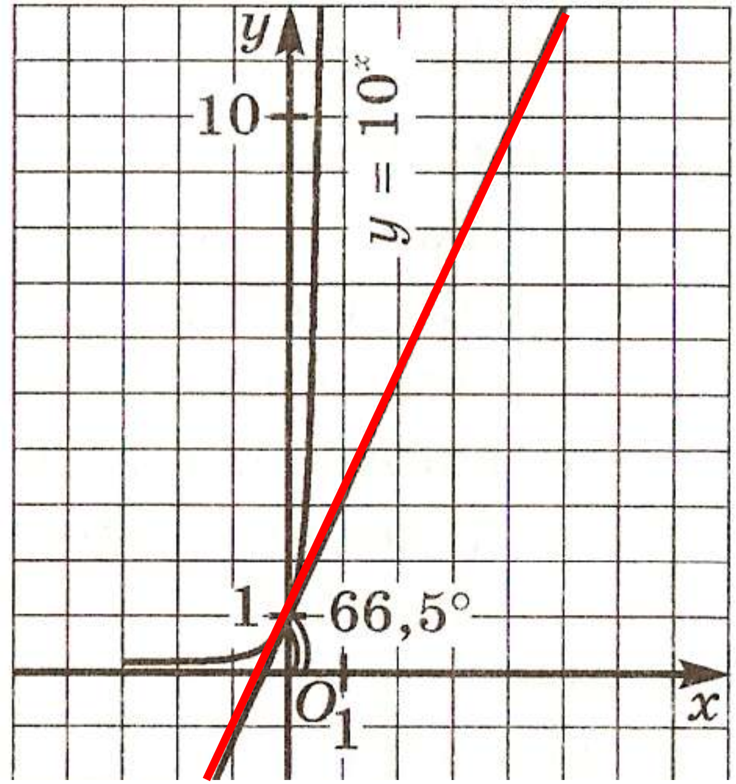
Число е. Функция $y = e^x$, её свойства, график, дифференцирование

Проведем касательную к графику функции $y = 2^x$
в точке x = 0 и измерим угол , который образует касательная с осью x



Проведем касательную к графику функции $y = 3^x$
в точке $x = 0$ и измерим угол , который образует касательная с осью x





С помощью точных построений касательных к графикам можно заметить, что если основание а показательной функции $y = a^x$ постепенно увеличивается от 2 до 10, то угол между касательной к графику функции в точке $x = 0$ и осью абсцисс постепенно увеличивается от 35° до 66,5°.

Следовательно существует основание а, для которого соответствующий угол равен 45°. И это значение а заключено между 2 и 3, т.к. при $a = 2$ угол равен 35°, при $a = 3$ он равен 48°.

В курсе математического анализа доказано, что данное основание существует, его принято обозначать буквой е.

Установлено, что е – иррациональное число, т. е. представляет собой бесконечную непериодическую десятичную дробь:

е = 2, 7182818284590… ;

На практике обычно полагают, что е ≈ 2,7.

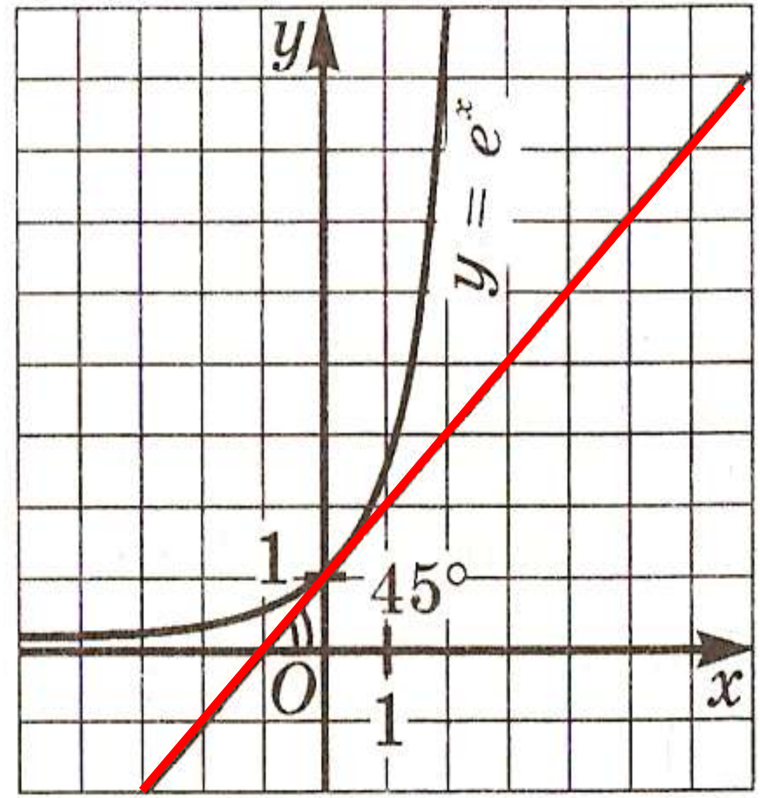
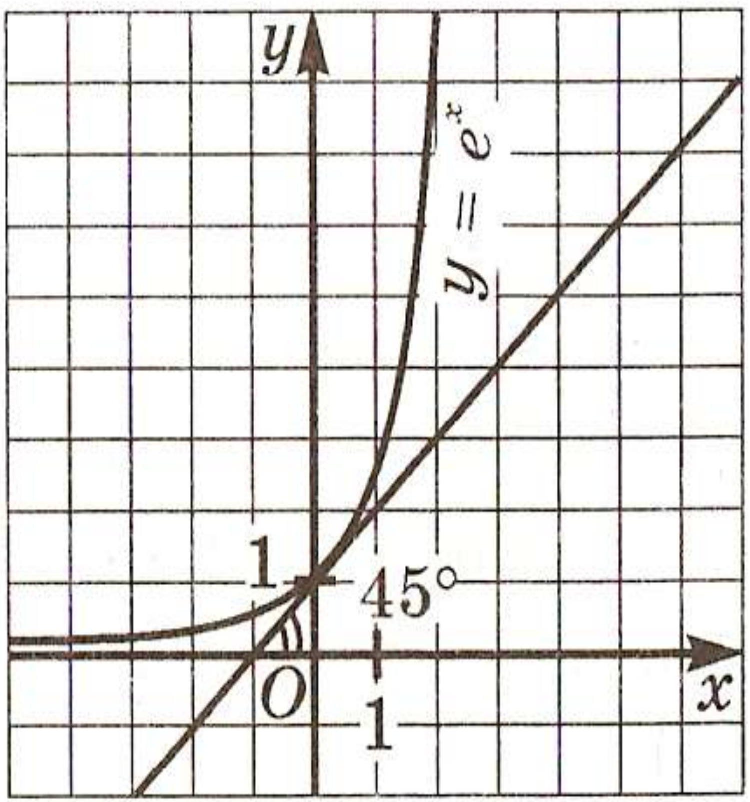


График и свойства функции $y = e^x$



1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;

2) не является ни четной, ни нечетной;

3) возрастает;

4) не ограничена сверху, ограничена снизу

5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значения;

6) непрерывна;

7) $E(f) = (0; +\infty)$;

8) выпукла вниз;

9) дифференцируема.

Функцию $y = e^x$ называют <u>экспонентой.</u>

$$\text{Функция } y = e^x - \text{показательная}$$

$$f'(x) = tg\,45^\circ = 1$$

$$\boxed{\left(e^x\right)' = e^x}$$

$\text{Например}:$

$$1)\left(e^{5x}\right)' = e^{5x} \cdot (5x)' = 5e^{5x}$$

$$2)\left(e^{3x}\right)' = 3e^{3x}$$

$$3)\left(e^{-x}\right)' = -e^{-x}$$

$$4)\left(e^{\frac{1}{2}x}\right)' = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}$$

$$5)\left(e^{2x+5}\right)' = 2e^{2x+5}$$

$$7)\left(e^{\sin x}\right)' = \cos x \cdot e^{\sin x}$$

$$6)\left(e^{x^2}\right)' = 2xe^{x^2}$$

$$8)\left(e\right)' = 0$$

$$9)\left(e^x \cdot \cos x\right)' = e^x \cdot \cos x - \sin x \cdot e^x$$

Пример 1. ***Провести касательную к графику функции в точке x=1.*** $y = e^x$

$$Решение:$$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$x_0 = 1$

$f'(x) = e^x$

$f'(x_0) = e$

$f(x_0) = e$

$y = e(x-1) + e =$

$= ex - e + e = ex$

$$Ответ: y = ex$$

Пример 2.

Вычислить значение производной функции в точке x = 3. $y = e^{4x-12}$

$Решение:$

$$y' = (e^{4x-12})' = 4e^{4x-12}$$

$$y'(3) = 4e^{4\cdot 3-12} = 4\cdot e^{0} = 4$$

$Ответ: 4$

Пример 3.

Исследовать на экстремум функцию $y = x^2 e^x$

$$Решение:$$

$$1) y' = (x^2 e^x)' = \left(x^2\right)' e^2 + x^2 \left(e^x\right)' =$$

$$= 2xe^x + x^2 e^x = xe^x\left(x+2\right);$$

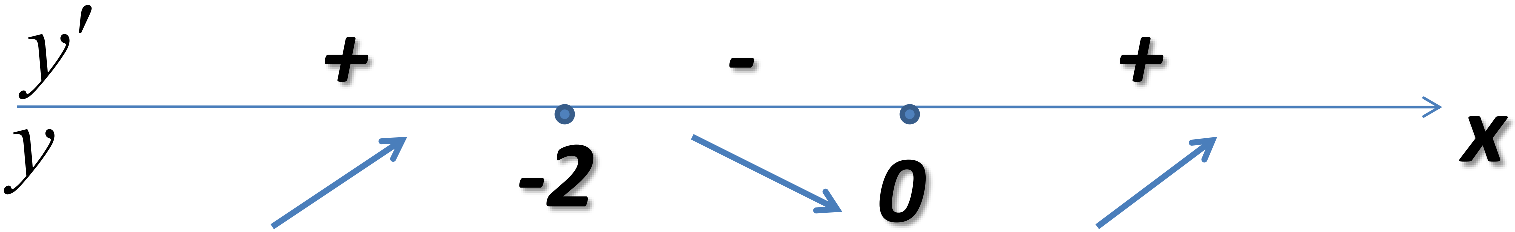
$$2) y' = 0;$$

$$xe^x\left(x+2\right) = 0;$$

$$xe^x = 0; \quad \left(x+2\right) = 0;$$

$$x = 0 \qquad x = -2$$

$$3)\ y' = xe^{x}\left(x+2\right);$$



$$y'(-3) > 0; \qquad y'(-1) < 0; \qquad y'(1) > 0$$

$$x = -2 - \textit{точка максимум} \quad y = x^{2}e^{x}$$

$$y_{\max} = y\left(-2\right) = \left(-2\right)^{2} e^{-2} = 4e^{-2} = \frac{4}{e^{2}}$$

$$x = 0 - \textit{точка минимум} \quad y = x^{2}e^{x}$$

$$y_{\min} = \left(0\right)^{2} e^{0} = 0$$

$$\textit{Ответ}: y_{\min} = 0; y_{\max} = \frac{4}{e^{2}}.$$

Натуральные логарифмы. Функция y = ln x, её свойства, график, дифференцирование

Если основанием логарифма служит число e, то говорят, что задан натуральный логарифм. Для натуральных логарифмов введено специальное обозначение ln (l – логарифм, n – натуральный).

$$\boxed{\ln x = \log_e x}$$

$$\log_e 2 = \ln 2$$

$$\log_e 7 = \ln 7$$

!!!

$$\ln e = 1;$$

$$\ln 1 = 0;$$

$$\ln e^{r} = r;$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

$$e^{\ln x} = x;$$

!!!

График и свойства функции y = ln x

Свойства функции y = ln x:

1) D (f) = (0; + ∞);

2) не является ни четной, ни нечетной;

3) возрастает на (0; + ∞);

4) не ограничена;

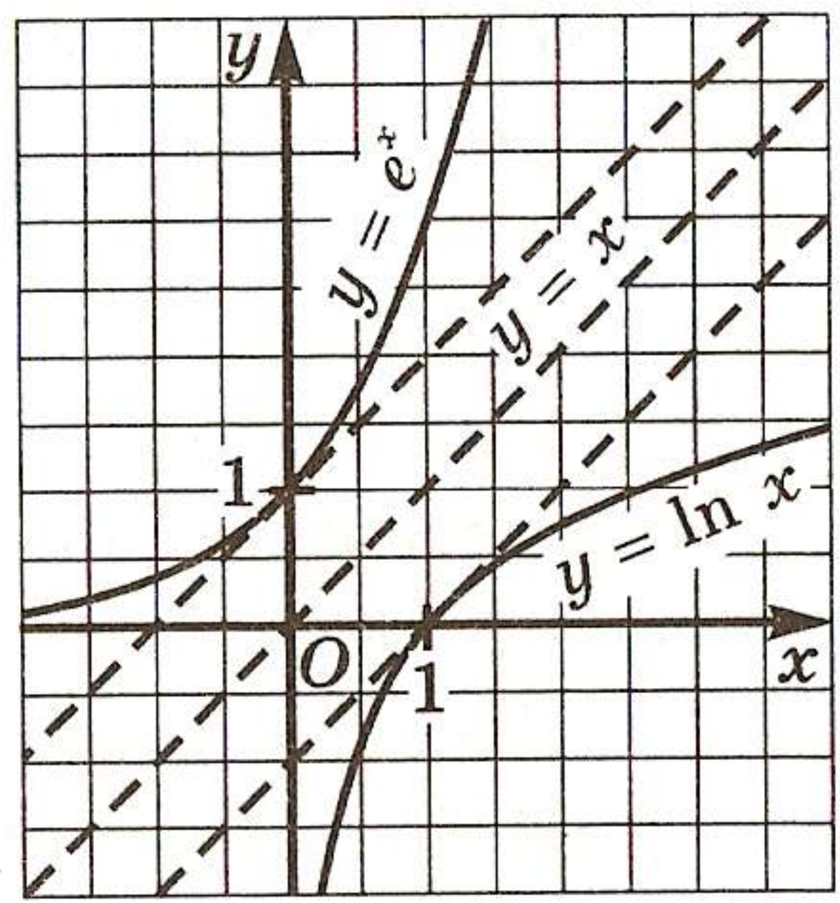
5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;

6) непрерывна;

7) E (f) = (- ∞; + ∞);

8) выпукла верх;

9) дифференцируема.



В курсе математического анализа доказано, что для любого значения *x>0* справедлива формула дифференцирования

$$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$$

Например:

$$1)\left(\ln 2x\right)' = \frac{1}{2x}\left(2x\right)' = \frac{1}{2x}\cdot 2 = \frac{1}{x}$$

$$2)\left(\ln(3+2x)\right)' = \frac{1}{3+2x}(3+2x)' = \frac{2}{3+2x}$$

$$3)\left(\ln\sin x\right)' = \frac{1}{\sin x}\left(\sin x\right)' = \frac{\cos x}{\sin x} = ctgx$$

$$4)(\ln 2)' = 0$$

5)Вычислить значение производной функции в точке x = -1.

$$y = \ln\left(3x+5\right)$$

$$y' = \left(\ln\left(3x+5\right)\right)' = 3\cdot\frac{1}{3x+5} = \frac{3}{3x+5};$$

$$y'(-1) = \frac{3}{2}$$

Дифференцирование функции $y = a^x$

$$a = e^{\ln a} \qquad a^x = e^{x \ln a}$$

$$(a^x)' = (e^{x\ln a})' = \ln a \cdot e^{x \ln a} = \ln a \cdot a^x$$

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a}$$

Например:

$$1)\left(2^x\right)' = 2^x \cdot \ln 2;$$

$$2)\left(4^{x+5}\right)' = 4^{x+5} \cdot \ln 4.$$

$$3)\left(5^{-3x}\right)' = -3 \cdot 5^{-3x} \cdot \ln 5.$$

Дифференцирование функции $y = \log_a x$

$$y' = (\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' =$$

$$= \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}}$$

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}}$$

Например:

$$1)\left(\log_7 x\right)' = \frac{1}{x \ln 7}$$

$$2)\left(\log_3 2x\right)' = \frac{1}{2x \ln 3}(2x)' = \frac{2}{2x \ln 3} = \frac{1}{x \ln 3}$$

$$3)\left(\log_2 x^3\right) = \frac{1}{x^3 \ln 2}(x^3)' = \frac{3x^2}{x^3 \ln 2} = \frac{3}{x \ln 2}$$

$$(e^x)' = e^x$$

!!!

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

!!!

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

Таблица производных

y	c	x	x^n	$\sqrt{x}$	$\sin x$	$\cos x$	tgx	$ctgx$	e^x	a^x	$\ln x$	$\log_a x$
y'	0	1	nx^{n-1}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	e^x	$a^x \ln a$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x \ln a}$