Определение производной

mathvideourok.moy.su

Производной функции наз. предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$И\ обозначают\ f^{'}(x)\quad (\ эф\ штрих\ от\ x)$

$$\boxed{f^{'}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}}$$

$\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ – *средняя скорость изменения функции*

Производная это скорость изменения функции

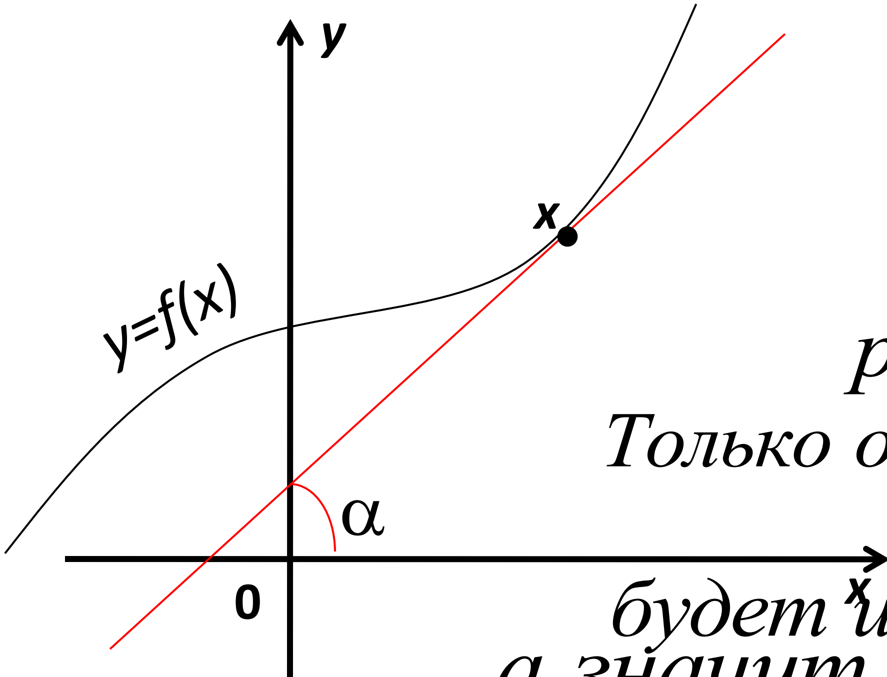
*Физический (механический) смысл производной

Производная выражает мгновенную скорость в момент времени t

$$a(t) = v'(t)$$

$$v(t) = s'(t)$$

Геометрический смысл производной



Изобразим функцию

$$y = f(x)$$

В т. $X \in y = f(x)$ *будем рассматривать секущие.*

Только одна из них с кривой $y = f(x)$

будет иметь одну общую точку, а значит являться касательной.

Говорят, что в этой точке секущая имеет предельное положение

Это предельное положение и называют касательной графика y=f(x) в т. X

В этом заключается геометрический смысл производной

Касательная не параллельна оси оу.

И имеет как всякая прямая с положительным направлением оси ох угол α и угловой коэффициент к

$$\boxed{f^{'}(x) = k = tg\alpha}$$

В прошлой теме мы находили некоторые производные.

$c' = 0$

$x' = 1$

$(x^2)' = 2x$

$(kx + m)' = k$

Алгоритм:

1. Зафиксировать x и найти $f(x)$
2. Найти $f(\Delta x + x)$
3. Найти $\Delta f = f(\Delta x + x) - f(x)$
4. Найти $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$
5. Найти $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x)$

Найдем производную для функции

$$y = x^3$$

$$\Delta f = f(\Delta x + x) - f(x) = (\Delta x + x)^3 - x^3 =$$

$$= \Delta x^3 + 3\Delta x^2 x + 3x^2 \Delta x + x^3 - x^3 =$$

$$= \Delta x^3 + 3\Delta x^2 x + 3x^2 \Delta x.$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^3 + 3\Delta x^2 x + 3x^2 \Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x^2 + 3\Delta x x + 3x^2) = 3x^2$$

значит $\boxed{(x^3)' = 3x^2}$

Проанализировав примеры

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(x^2)' = 2x$$

$$(x^3)' = 3x^2$$

$$(x^4)' = 4x^3$$

$$y = \sqrt{x}$$

$$y' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Если функция имеет производную в т. Х, то ее называют **дифференцируемой** в т. Х

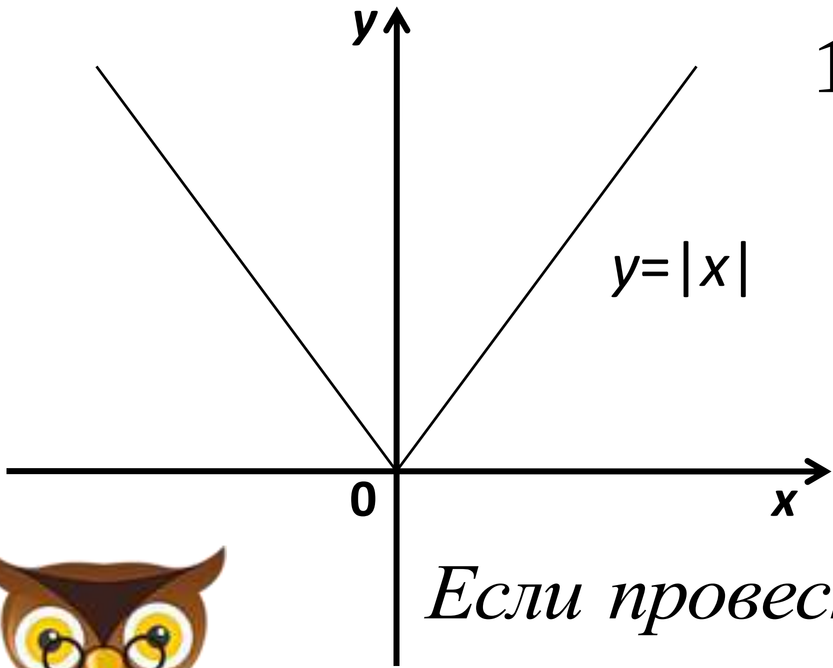
Процедуру отыскания производной функции наз. **дифференцированием функции.**

Если функция дифференцируема в т. Х , значит она **непрерывна** в этой точке.

Обратное неверно. Если функция непрерывна в точке, то это **не** означает, что она в ней имеет производную.

Например

1. Рассмотрим функцию $y = |x|$



Она непрерывна на всей числовой прямой.

Значит и в точке 0.

Но в этой точке нельзя провести касательную.

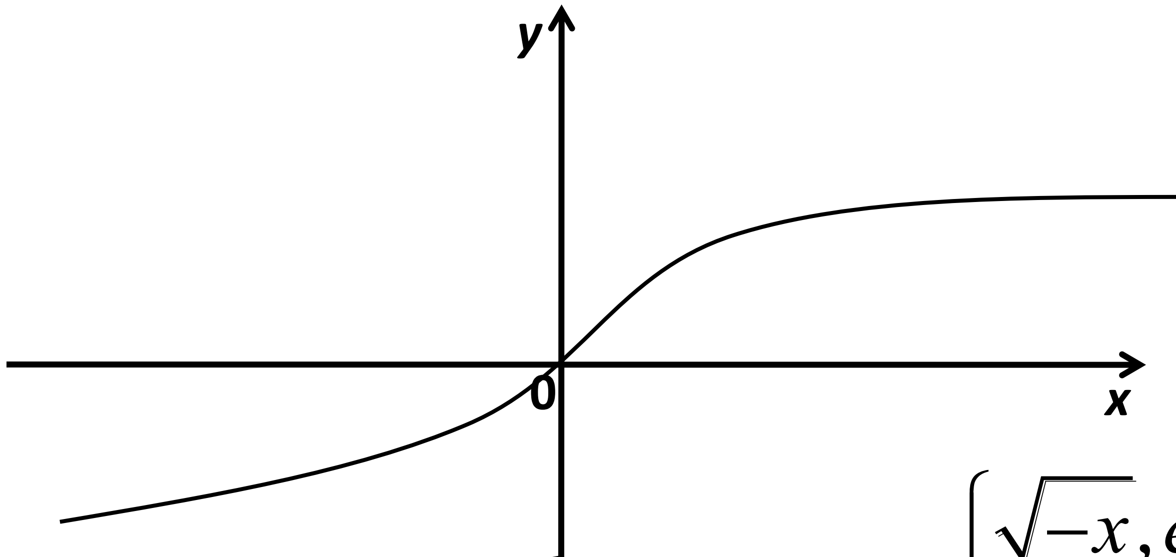
Если провести "мнимую касательную", то это будет прямая $y = 0$.

В ней $к = 0$

Значит и производной НЕТ

Касательную в "пике" провести нельзя.

Значит и производной в "пике" НЕТ



2.*Рассмотрим функцию* $y = \begin{cases} \sqrt{-x}, \text{если } x < 0 \\ \sqrt{x}, \text{если } x \geq 0 \end{cases}$

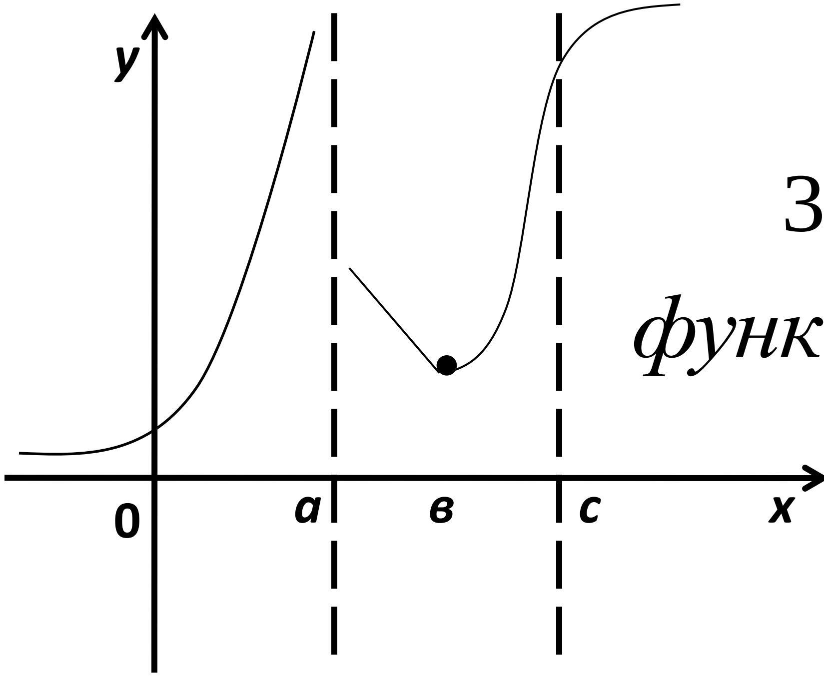
Эта функция непрерывна в любой точке. И в 0.
Однако, если в ней проводить касательную,
то она совпадет с осью оу
и перпендикулярна оси ох.

$k = tg\ 90°$ - *не сущ.*
Производной нет.

Если в некоторой точке касательная $\perp$ оси ох,
то производной в этой точке НЕТ

Если в некоторой точке касательная к графику

функции не существует или она перпендикулярна оси абсцисс, то в этой точке функция не дифференцируема.



$3.$ *В данном примере функция дифференцируема всюду, кроме*

$$x = a - \text{касательная не существует}$$

$$x = в - \text{касательная не существует (пика)}$$

$$x = c - \text{касательная не существует} (\perp ox)$$