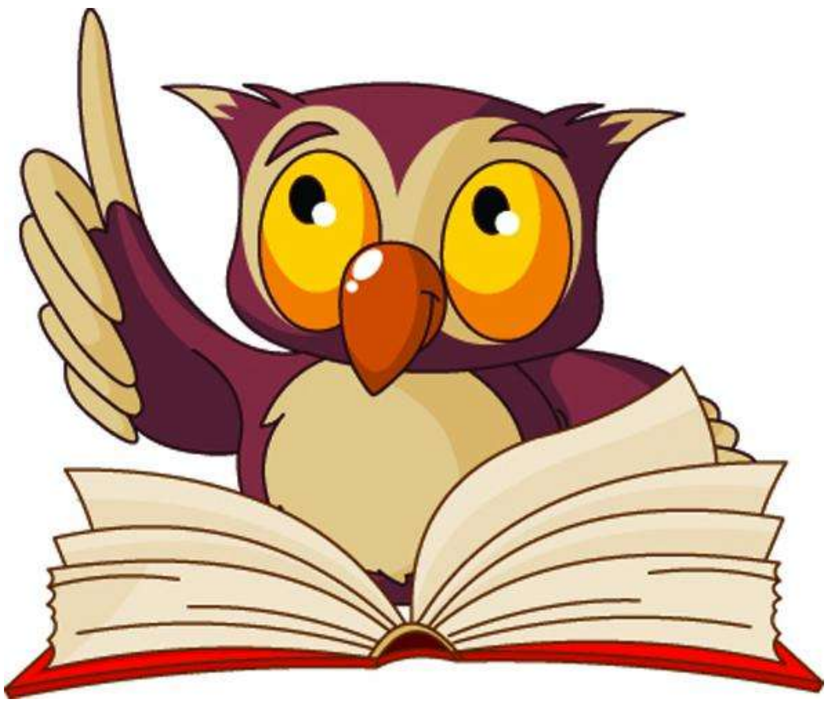
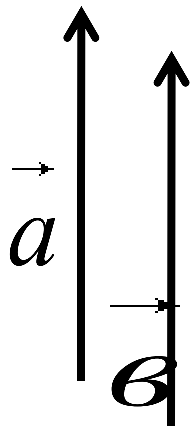
Скалярное произведение векторов



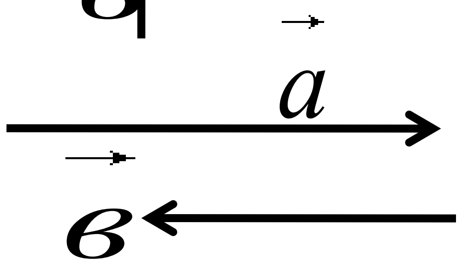
mathvideourok.moy.su

Угол между векторами



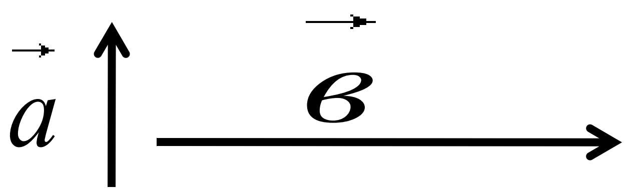
$$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{\text{в}}$$

$$\vec{a}\,\hat{}\,\vec{\text{в}} = 0^\circ$$



$$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{\text{в}}$$

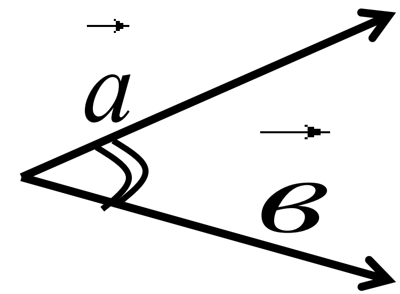
$$\vec{a}\,\hat{}\,\vec{\text{в}} = 180^\circ$$

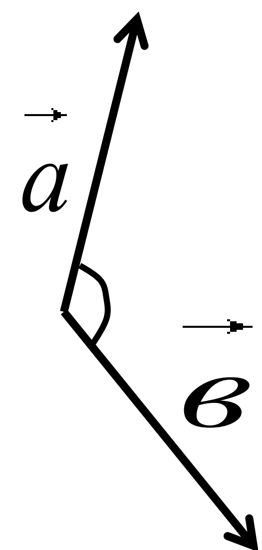


$$\vec{a} \perp \vec{\text{в}}$$

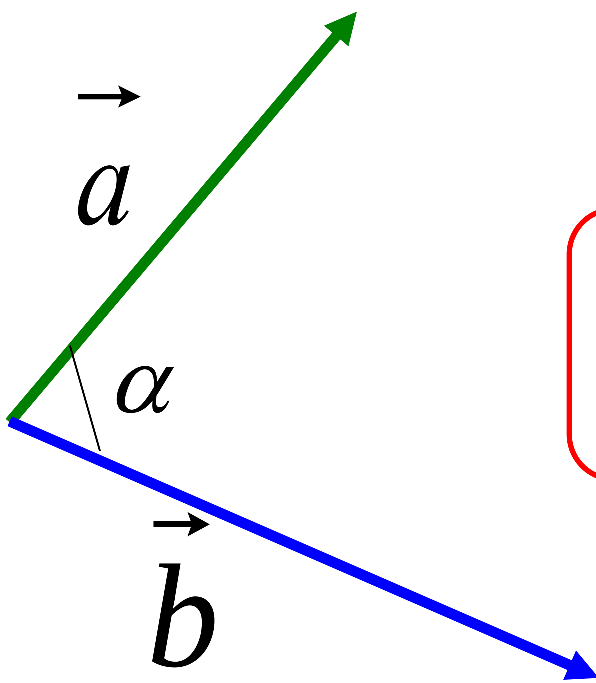
$$\vec{a}\,\hat{}\,\vec{\text{в}} = 90^\circ$$

$$\vec{a}\,\hat{}\,\vec{\text{в}} = \alpha$$





Скалярное произведение векторов.



Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{в}\right|\cos\alpha$$

Теорема: Если векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю

$$Дано: \vec{a} \perp \vec{в}$$

$$Доказать: \vec{a} \cdot \vec{в} = 0$$

$$Доказательство:$$

$$\vec{a} \cdot \vec{в} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{в}\right| \cos\alpha = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{в}\right| \cos 90^\circ = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{в}\right| \cdot 0 = 0$$

Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины

$$Доказательство: \overrightarrow{a^2} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{a}\right| \cos 0^\circ = \left|\vec{a}\right|^2$$

Формула скалярного произведения векторов в пространстве.

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \qquad \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}$$

Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов.

Косинус угла между ненулевыми векторами

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$$

$$\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{в}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{в}|}$$

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Свойства скалярного произведения

Для любых векторов $\vec{a}, \vec{в}, \vec{c}$ *и любого числа к справедливы равенства:*

$$1)\ \vec{a}^2 \geq 0$$

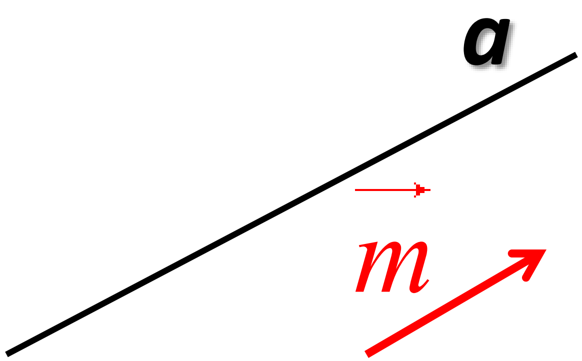
$$2)\ \vec{a} \cdot \vec{в} = \vec{в} \cdot \vec{a}$$

$$3)\ \left(\vec{a} + \vec{в}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{в} \cdot \vec{c}$$

$$4)\ к \cdot \left(\vec{a} \cdot \vec{в}\right) = \left(к \cdot \vec{a}\right) \cdot \vec{в}$$

Вычисление углов между прямыми и плоскостями

Определение: ненулевой вектор называется направляющим вектором прямой а, если он лежит либо на прямой а, либо на прямой параллельной прямой а.



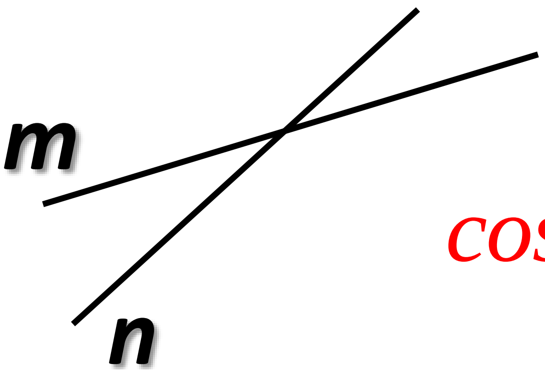
Задача. Найти угол между двумя прямыми, если известны координаты направляющих векторов этих прямых

Решение:

Углом между двумя прямыми считается тот, который меньше.

Пусть направляющие вектора этих прямых имеют координаты $\{x_1; y_1; z_1\}$ *и* $\{x_2; y_2; z_2\}$.

Если α *- острый, то* $\cos\alpha \geq 0$



$$\cos\alpha = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

находят α

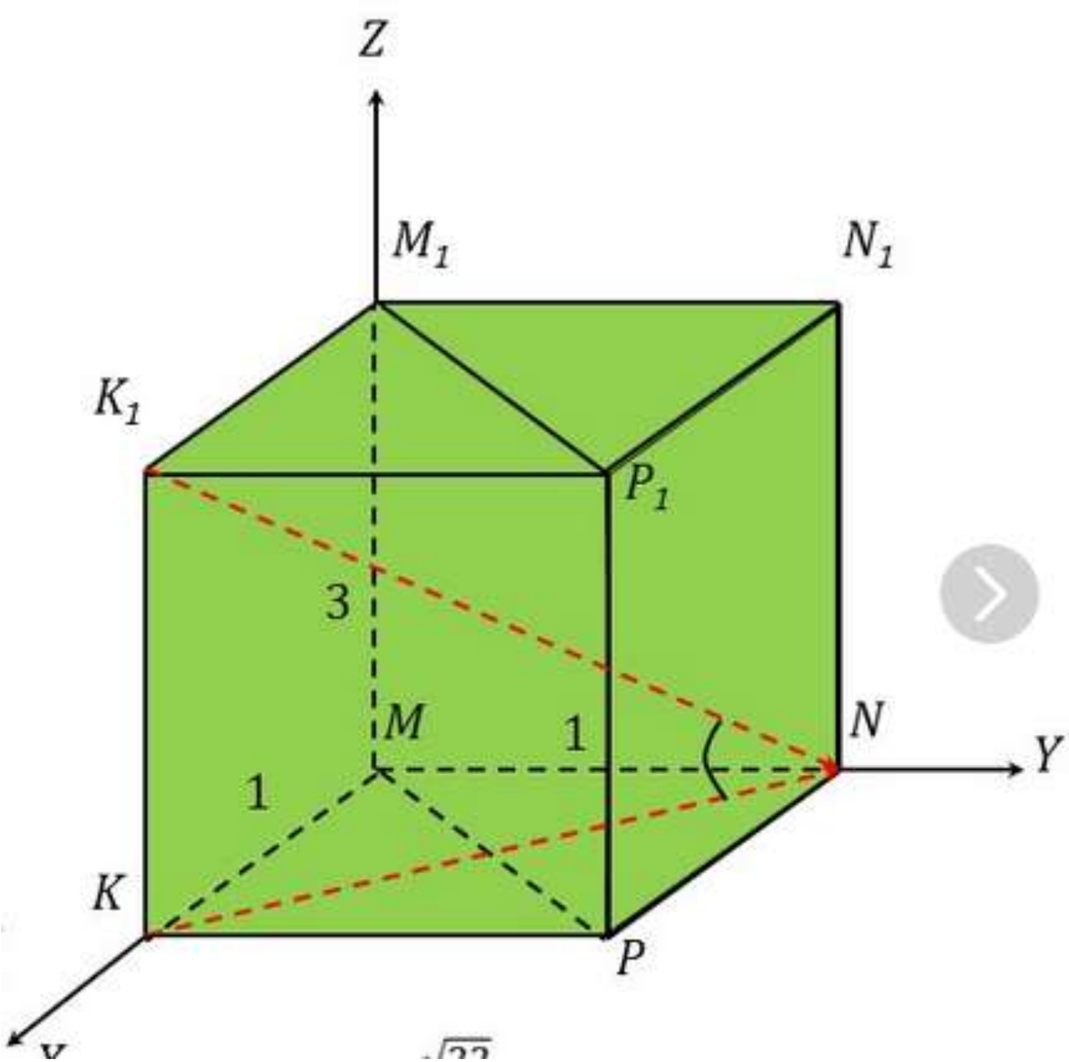
Задача : Найти угол между прямой и плоскостью, если известны координаты направляющего вектора прямой и координаты ненулевого вектора, перпендикулярного к плоскости

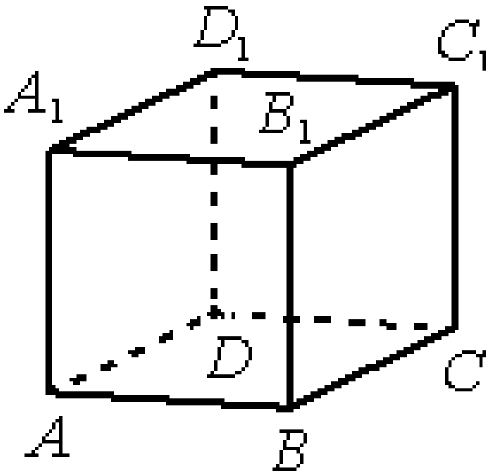
Самостоятельно разобрать по книге

Чтобы найти угол между прямой и плоскостью α, надо:

1) Найти $\cos\beta$ между направляющим вектором прямой и вектором перпендикулярным плоскости α
2) Найти угол α- угол между прямой и плоскостью решив $\sin\alpha = \cos\beta$

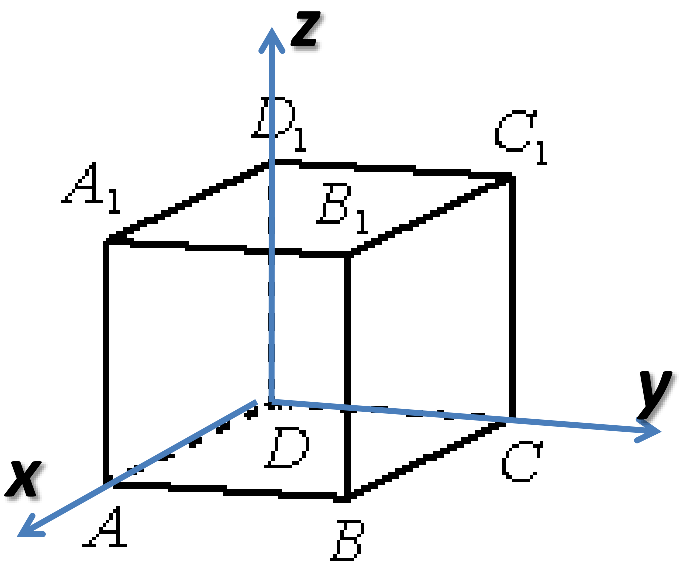
Метод координат в пространстве





❸ **В кубе ABCDA1B1C1D1 найдите угол между прямыми CD1 и BC1. Ответ дайте в градусах.**

Решение. *Пусть ребро куба равно* 1



$C(0;1;0)$ $\quad$ $B(1;1;0)$

$D_1(0;0;1)$ $\quad$ $C_1(0;1;1)$

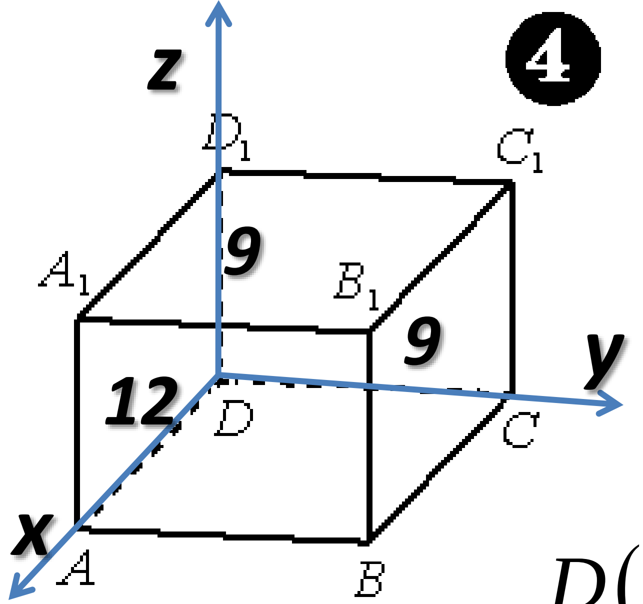
$\overrightarrow{CD_1}\{0;-1;1\}$ $\quad$ $\overrightarrow{BC_1}\{-1;0;1\}$

$|\overrightarrow{CD_1}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ $\quad$ $|\overrightarrow{BC_1}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$Cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{CD_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}|}{|\overrightarrow{CD_1}| \cdot |\overrightarrow{BC_1}|} = \frac{|0+0+1|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$\alpha = 60°$

Ответ : 60



4 **В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB=9$, $AD=12$, $AA_1=9$. Найдите синус угла между прямыми DD_1 и B_1C**

Решение.

$$D(0;0;0)$$

$$D_1(0;0;9)$$

$$B_1(12;9;9)$$

$$C(0;9;0)$$

$$\overrightarrow{B_1C}\{-12;0;-9\}$$

$$\overrightarrow{DD_1}\{0;0;9\} \quad \left|\overrightarrow{DD_1}\right| = \sqrt{9^2} = 9$$

$$\left|\overrightarrow{B_1C}\right| = \sqrt{144+81} = 15$$

$$Cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{DD_1}\cdot\overrightarrow{B_1C}\right|}{\left|\overrightarrow{DD_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{B_1C}\right|} = \frac{|-81|}{9\cdot 15} = \frac{3}{5}$$

$$Sin\alpha = \sqrt{1-Cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$Ответ: 0,8$$