Уравнение касательной к графику функции.

mathvideourok.moy.su

$Дано: \ \ \mathrm{y} = f(x) \text{ и } M(x_0; f(x_0))$

Составить уравнение касательной

к графику заданной функции в точке x_0

Решение:

уравнение касательной имеет вид

$$y = kx + b$$

найдем k и b

$k -$ *угловой коэффициент* $k = f'(x_0)$

$b -$ *найдем подставив в уравнение коорд.M*

$$y = kx + b$$

$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b$$

$b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$ *подставим*

$$y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$ – *уравнение касательной к графику функции в точке*

Алгоритм составления уравнения касательной:

1. Записывают уравнение касательной

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

2. Находят компоненты этого уравнения и подставляют преобразовывая выражение

$$1.\,Дано: y=\frac{1}{x}$$

Составить уравнение касательной графика в точке $x_0=1$

Решение:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$$

$$f'(x_0)=f'(1)=-\frac{1}{1}=-1$$

$$f(x_0)=f(1)=\frac{1}{1}=1\ подставим$$

$$y=-1(x-1)+1=-x+1+1=-x+2$$

$$Ответ: y=-x+2$$

$2. \text{Дано}: y = \dfrac{x^3}{3}$

К данному графику провести касательную

параллельную прямой $y = 4x - 5$

$\text{Решение}: \ y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Мы не знаем x_0. *Найдем* x_0

Касательная параллельна прямой

$y = 4x - 5$ *, значит* $k = 4$ *так как* $k = f'(x_0)$

$\text{то } f'(x) = (\frac{1}{3}x^3)' = x^2, \ \text{то } x_0^2 = 4, x_0 = \pm 2$

$$a)\,Если\ x_0 = 2$$

$$f'(2) = 4$$

$$f(2) = \frac{8}{3}$$

$$y = 4(x-2) + \frac{8}{3}$$

$$y = 4x - 8 + 2\frac{2}{3}$$

$$y = 4x - 5\frac{1}{3}$$

$$б)\,Если\ x_0 = -2$$

$$f'(-2) = 4$$

$$f(-2) = -\frac{8}{3}$$

$$y = 4(x+2) - \frac{8}{3}$$

$$y = 4x + 8 - 2\frac{2}{3}$$

$$y = 4x + 5\frac{1}{3}$$

$$Ответ: y = 4x - 5\frac{1}{3}; y = 4x + 5\frac{1}{3}$$

3. *Дано*: $y=\sqrt{x}$

Провести касательную к графику функции через точку $(0;1)$

Решение: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

Найдем x_0

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0}} \qquad f(x_0)=\sqrt{x_0}$$

Подставим $(0;1)$ *в уравнение*

$$1=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(0-x_0)+\sqrt{x_0}$$

$$x_0 = 4$$

$$\text{подставим} \quad f'(4) = \frac{1}{4} \qquad f(4) = 2$$

$$y = \frac{1}{4}(x-4) + 2 = \frac{1}{4}x - 1 + 2 = \frac{1}{4}x + 1$$

$$\text{Ответ}: y = \frac{1}{4}x + 1$$