Уравнения

mathvideourok.moy.su

Равносильность уравнений

Определение: Два уравнения называются равносильными, если они имеют одинаковые корни или вообще не имеют корней

$1)\ x^2 - 4 = 0$

$(x-2)(x+2) = 0$

равносильны

$2)\ x^2 + 1 = 0$

$\sqrt{x} = -3$

равносильны

Решение уравнений осуществляется в три этапа

1. **Технический (осуществляется преобразования и находят корни)**
2. **Анализ решения (анализируют равносильны ли преобразования)**
3. **Проверка.**

Общие методы решения уравнений

- **1. Замена уравнения h(f(x))=h(g(x)) уравнением f(x)=g(x)**

Этот метод можно применять, если y=h(x)-монотонная функция

Например:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} - \text{показательные уравнения}$$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) - \text{логарифмические}$$

$$\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)} - \text{иррациональные}$$

$$1)(2x+2)^7=(5x-9)^7$$

$$так\ как\ y=z^7-монотонна, то$$

$$2x+2=5x-9$$

$$-3x=-11$$

$$x=\frac{11}{3}$$

$$Ответ: \frac{11}{3}$$

$$2)(2x+2)^4=(5x-9)^4$$

$$(2x+2)^4-(5x-9)^4=0$$

$$\left((2x+2)^2-(5x-9)^2\right)\left((2x+2)^2+(5x-9)^2\right)=0$$

$$(2x+2)^2-(5x-9)^2=0;(2x+2)^2+(5x-9)^2=0$$

корней нет

$$\left((2x+2)-(5x-9)\right)\left((2x+2)+(5x-9)\right)=0$$

$$2x+2-5x+9=0; \qquad 2x+2+5x-9=0$$

$$-3x=-11 \qquad 7x=7$$

$$x=\frac{11}{3} \qquad x=1$$

$$Ответ:1;\frac{11}{3}$$

2. Метод разложения на множители

Его суть состоит в том, что уравнение

$f(x)g(x)h(x)=0$

можно заменить совокупностью уравнений

$f(x)=0$; $g(x)=0$; $h(x)=0$

Решив уравнение этой совокупности, нужно взять те их корни, которые принадлежат ОДЗ

Например: $1)\left(\sqrt{x+2}-3\right)\cdot\left(2^{x^2+6x+5}-1\right)\cdot\ln(x-8)=0$

ОДЗ: $\begin{cases} x+2\ge 0 \\ x-8>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge -2 \\ x>8 \end{cases}$ $x\in(8;+\infty)$

$\sqrt{x+2}-3=0;$

$\sqrt{x+2}=3$

$x+2=9$

$x=7$

$7\notin(8;+\infty)$

не явл.корнем исходного уравнения

$2^{x^2+6x+5}-1=0;$

$2^{x^2+6x+5}=2^0$

$x^2+6x+5=0$

т.к. $y=2^m$ – *монотонна на* $D(y)=R$

$x_1=-5; x_2=-1$

не явл.корнями исходного уравнения

$\ln(x-8)=0$

$x-8=e^0$

$x-8=1$

$x=9$

$9\in(8;+\infty)$

корень исходного уравнения

Ответ: 9

$2)\, x^3 - 7x + 6 = 0$ $\qquad \pm1; \pm2; \pm3; \pm6$

$x = 1 -$ *корень уравнения*

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 7x + 6 & x - 1 \\ \cline{2-2} -\,\underline{x^3 - x^2} & x^2 + x - 6 \\ x^2 - 7x & \\ -\,\underline{x^2 - x} & \\ -6x + 6 & \\ -\,\underline{-6x + 6} & \\ 0 & \end{array}$$

$(x-1)(x^2 + x - 6) = 0$

$x - 1 = 0; x^2 + x - 6 = 0$

$x = 1$ $\qquad x_1 = 2$

$x_2 = -3$

$Ответ: 1; 2; -3$

3. Метод введения новой переменной

Его суть состоит в том, что нужно удачно ввести новую переменную на основе которой находят исходную переменную

$$Например:$$

$$\sqrt{x^2 - x + 2} + \sqrt{x^2 - x + 7} = \sqrt{2x^2 - 2x + 21}$$

$$Пусть: x^2 - x = m$$

$$\sqrt{m+2} + \sqrt{m+7} = \sqrt{2m+21}$$

$$\left(\sqrt{m+2} + \sqrt{m+7}\right)^2 = \left(\sqrt{2m+21}\right)^2$$

$$m+2+2\sqrt{m+2}\sqrt{m+7}+m+7=2m+21$$

$$2\sqrt{m+2}\sqrt{m+7}=12\ /:2$$

$$\sqrt{m+2}\sqrt{m+7}=6$$

$$\left(\sqrt{m+2}\sqrt{m+7}\right)^2=6^2$$

$$(m+2)(m+7)=36$$

$$m^2+9m-22=0$$

$$m_1=2;m_2=-11$$

$Проверка: 1) если\ m=2,$

$\sqrt{2+2}+\sqrt{2+7}=\sqrt{4+21}-верно, то$

$$x^2-x=2$$

$$x^2-x-2=0$$

$$x_1=-1;x_2=2$$

$2) если\ m=-11,$

$$\sqrt{-11+2}+\sqrt{-11+7}=\sqrt{-22+21}$$

$-не\ имеет\ смысла$

$-11-не\ является\ корнем\ уравнения$

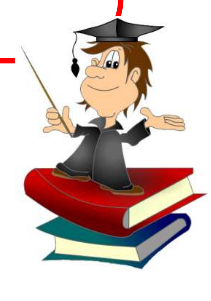
$Ответ: -1;2$

4. Функционально- графический метод.

Его суть состоит в том, что при решении уравнения $f(x)=g(x)$ нужно построить в одной и той же плоскости графики $y=f(x)$ и $y=g(x)$. И найти точки их пересечения

В этот же блок входит и следующий случай. Графики не рисуют, а ссылаются на свойства функций

1)Если одна из функций возрастает, а другая убывает, то уравнение $f(x)=g(x)$ либо не имеет корней либо имеет один корень (который можно угадать)



Например:

$$1)\, x^5 + 5x - 42 = 0$$

$$x^5 = -5x + 42$$

$x = 2$ – *единст.корень* *так как*

$y = x^5$ – *возрастает на* $D(y) = R$

$y = -5x + 42$ – *убывает на* $D(y) = R$

Ответ: 2

$$2)\, 3^x + 4^x = 5^x$$

$x = 2$ – *един.корень*

$$3^x + 4^x = 5^x \;/ : 4^x \neq 0$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x + 1 = \left(\frac{5}{4}\right)^x$$

$y = \left(\frac{3}{4}\right)^x + 1$ – *убывает на* $D(y) = R$

$y = \left(\frac{5}{4}\right)^x$ – *возрастает на* $D(y) = R$

Ответ: 2

2)Если на одном промежутке наибольшее значение одной из функций y=f(x) равно A, а наименьшее значение функции y=g(x) равно A, то уравнение f(x)=g(x) равносильно

$$\begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = A \end{cases}$$

Например: $\cos 2\pi x = x^2 - 2x + 2$

1) $\cos 2\pi x \in [-1;1]$, *значит для* $y = \cos 2\pi x$ *наибольшее значение* 1

2) $y = x^2 - 2x + 2$ – *парабола* *ветви направлены вверх*

и наименьшее значение в 1*-вершине так как*

$$x_{в} = -\frac{в}{2a} = \frac{2}{2} = 1 \qquad y_{в} = 1^{2} - 2 + 2 = 1$$

$$3)\begin{cases}\cos 2\pi x = 1\\ x^{2} - 2x + 2 = 1\end{cases}$$

$$x^{2} - 2x + 2 = 1$$

$$x = 1$$

Проверка: если $x = 1$, *то*

$$\cos 2\pi \cdot 1 = 1 - \textit{верно}$$

Ответ: 1