

Вычисление производных



Формулы дифференцирования

y	x^n	x	C	$\sqrt{x}$	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
y'	nx^{n-1}	1	0	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$

Выведем одну из формул для $y = \sin x$

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(\Delta x + x) - f(x) = \sin(\Delta x + x) - \sin x = \\ &= 2 \sin \frac{\Delta x + x - x}{2} \cos \frac{\Delta x + x + x}{2} = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \frac{\Delta x + 2x}{2}.\end{aligned}$$



$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{\Delta x + 2x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\Delta x}{2} + x\right) = 1 \cdot \cos x$$

Значит $(\sin x)' = \cos x$



Найдем производную функции :

$$1. (3x + 5)' = 3$$

$$2. (x^2)' = 2x$$

$$3. (\cos y)' = -\sin y$$

$$4. \text{Найти } f'(0) \text{ для } y = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$f'(0) = -\sin 0 = 0$$

так как $(kx + m)' = k$

так как $(x^n)' = nx^{n-1}$



5. Составить уравнение касательной
к графику $y = x^2$ в точке $x = 1$

решение:

Уравнение касательной $y = kx + m$

$$k = f'(1) = ? \quad f'(x) = (x^2)' = 2x$$

$$k = f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$$

Зная, что $x = 1$ найдем y .

$$\text{Подставим все в } y = x^2 \quad y = 1^2 = 1$$

$$\text{получаем } 1 = 2 \cdot 1 + m \text{ откуда } m = -1$$

Ответ: $y = 2x - 1$.



Правила дифференцирования

*Производная суммы равна сумме
производных*

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$



$$(x^2 + \sin x)' = (x^2)' + (\sin x)' = 2x + \cos x$$



Постоянную выносят за знак производной



$$(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$$

$$(5x^2)' = 5(x^2)' = 5 \cdot 2x = 10x$$

$$\left(-\frac{\cos x}{3}\right)' = -\frac{1}{3}(\cos x)' = \frac{1}{3}\sin x$$



Производная произведения

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$



$$\begin{aligned}(2x \cdot \sin x)' &= (2x)' \cdot \sin x + (\sin x)' \cdot 2x = \\ &= 2 \sin x + 2x \cos x\end{aligned}$$

$$(2x \cdot 3x)' = (6x^2)' = 6 \cdot 2x = 12x$$



Производная частного



$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2}{5-4x} \right)' &= \frac{(x^2)' \cdot (5-4x) - (5-4x)' \cdot x^2}{(5-4x)^2} = \\ &= \frac{2x(5-4x) + 4 \cdot x^2}{(5-4x)^2} = \frac{10x - 8x^2 + 4x^2}{(5-4x)^2} = \frac{10x - 4x^2}{(5-4x)^2} \end{aligned}$$

Практикум

$$a)(3x^2 - 4x + 2)' = 6x - 4$$

$$б)(x^3)' = 3x^2$$

$$в)(3\operatorname{tg}x)' = 3 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{3}{\cos^2 x}$$

$$г)(3x)' = 3$$

$$д)\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$$

$$е)(10)' = 0 \quad \text{ж)}(x^2 \cdot \sqrt{x})' = (x^{2,5})' = 2,5x^{1,5}$$



3) Найти точки в которых
касательная к графику функции
 $y = x^3 - 3x + 2$ параллельна оси x

Решение:

Если касательная параллельна оси x , то

$$y' = (x^3 - 3x + 2)' = 3x^2 - 3 \qquad k = y' = 0$$

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$3(x^2 - 1) = 0$$

$$x = \pm 1$$

$$\text{если } x = 1, \text{ то } y = 1 - 3 + 2 = 0$$

$$x = -1, \text{ то } y = -1 + 3 + 2 = 4$$

Ответ: $(1; 0)(-1; 4)$



$$1.(2)'$$

$$2.(m)'$$

$$3.(x+5)'$$

$$4.(2x-1)'$$

$$5.(x^4)'$$

$$6.\left(\frac{1}{8}\right)'$$

$$7.y'$$

$$8.(y-3)'$$

$$9.(4x+1)'$$

$$10.(x^7)'$$

$$11.(8x)'$$

$$12.(59,4)'$$

$$13.(3x+1)'$$

$$14.(x^6)'$$

$$15.(x^7)'$$

$$16.(y^9)'$$

$$17.(2x^6)'$$

$$18.(5y^3)'$$

$$19.(2x^4)'$$

$$20.(2x^8-3)'$$

$$21.(3x^2+5)'$$

$$22.(3y^2+4y^3)'$$

$$23.(5y+8x^2)'$$

$$24.(2\sin x)'$$



$$25.(3 \cos x)'$$

$$26.(0,5 \operatorname{tg} x)'$$

$$27.(2 \operatorname{ctg} x)'$$

$$28.(5x^{\frac{3}{5}})'$$

$$29.(2x^3 - \sin x)'$$

$$30.(\cos x + \sin x)'$$

$$31.(5 - 7x)'$$

$$32.(2 - 3x^2)'$$

$$33.((2x + 3)(3x + 1))'$$

$$34.((x - 1)(x + 1))'$$

$$35.(y^3 \cdot \sin x)'$$

$$36.(\frac{x - 5}{2x - 5})'$$

$$37.((x - 1)(x^2 + x + 1))'$$

$$38.(1 - \cos x)'$$

$$39.(\cos^2 x + \sin^2 x)'$$

$$40.(\frac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1})'$$



Производная сложной функции

$$(g(f(h(x))))' = g'(f(h(x))) \cdot f'(h(x)) \cdot h'(x)$$

$$1. ((3x - 5)^9)' = 9(3x - 5)^8 \cdot (3x - 5)' = 27(3x - 5)^8$$

$$2. ((2x^2 - 1)^6)' = 6(2x^2 - 1)^5 \cdot (2x^2 - 1)' = 24x(2x^2 - 1)^5$$

$$3. \left(\frac{1}{(4x - 2)^3} \right)' = ((4x - 2)^{-3})' = \\ = -3(4x - 2)^{-4} \cdot (4x - 2)' = \frac{-12}{(4x - 2)^4}$$



$$4.(\sqrt{8-x^2})' = \frac{1}{2\sqrt{8-x^2}} \cdot (8-x^2)' =$$

$$= \frac{-2x}{2\sqrt{8-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{8-x^2}}$$

$$5.\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-7x+10}}\right)' = ((x^2-7x+10)^{-0,5})' =$$

$$= -0,5(x^2-7x+10)^{-1,5}(x^2-7x+10)' =$$

$$= -0,5(x^2-7x+10)^{-1,5}(2x-7) =$$

$$= (-x+3,5)(x^2-7x+10)^{-1,5}$$



$$6.(\cos 2x)' = -\sin 2x \cdot (2x)' = -2\sin 2x$$

$$7.(\sin 3x)' = \cos 3x \cdot (3x)' = 3\cos 3x$$

$$8.(tg 4x)' = \frac{1}{\cos^2 4x} \cdot (4x)' = \frac{4}{\cos^2 4x}$$

$$9.(\sin^2 x)' = 2\sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$$

$$10.(\cos^3 x)' = 3\cos^2 x \cdot (\cos x)' = 3\cos^2 x(-\sin x) = \\ = -3\cos^2 x \sin x$$



$$\begin{aligned} 11. (x^3 \cdot \cos 2x)' &= (x^3)' \cdot \cos 2x + (\cos 2x)' \cdot x^3 = \\ &= 3x^2 \cos 2x - \sin 2x (2x)' x^3 = 3x^2 \cos 2x - 2x^3 \sin 2x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12. (\cos^2 3x)' &= 2 \cos 3x \cdot (\cos 3x)' = \\ &= 2 \cos 3x (-\sin 3x) \cdot (3x)' = -6 \cos 3x \sin 3x = \\ &= -3 \sin 6x \end{aligned}$$



Практикум

$$a)((x+5)^8)'$$

$$б)(\sin 6x)'$$

$$в)((x-1)^9)'$$

$$г)(\cos 4x)'$$

$$д)(x^3-2)^2)'$$

$$е)(\sin(4x-1))'$$

$$ж)(2x^4-3)^5)'$$

$$з)(\cos x^2)'$$

