Числовые неравенства и их свойства

mathvideourok.moy.su

Числовые неравенства

Определение: Число а больше числа в, если разность а-в положительное число; число а меньше числа в, если разность а-в отрицательное число; число а равно числу в, если разность а-в равна 0

На координатной прямой большее число изображается точкой лежащей правее, а меньшее точкой лежащей левее.

Например: Докажем, что при любых значениях а верно неравенство

$$(a-3)(a-5) < (a-4)^2$$

Рассмотрим разность

$$(a-3)(a-5)-(a-4)^2 =$$

$$= a^2 - 5a - 3a + 15 - (a^2 - 8a + 16) =$$

$$= a^2 - 5a - 3a + 15 - a^2 + 8a - 16 = -1 < 0$$

При любом а эта разность отрицательна, значит это равенство верно при любом а

Свойства числовых неравенств

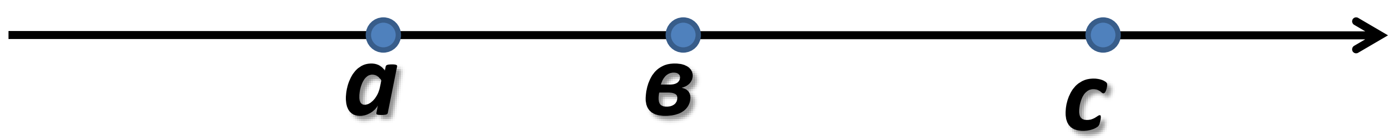
Теорема 1. Если а>в, то в<а, если а<в, то в> а

$$\text{Действительно, если } а - в > 0, \text{то } в - а < 0$$

$$\text{Напрмер}: 5 > 3, \text{значит } 3 < 5$$

Теорема 2. Если а<в, в< с, то а< с

$$\text{Рассмотрим на координатной прямой}$$



$$\text{Например}; 3 < 5; \; 5 < 7; \text{то } 3 < 7$$

Теорема 3. Если а<в, с-любое число, то а+с<в+с

Если к обеим частям неравенства прибавить одно и тоже число, то получится верное равенство

$$Например: 3<5,\ то\ 3+2<5+2$$

Теорема 4.

Если а<в, с- положительное число , то ас<вс

Если а< в, с –отрицательное число, то ас>вс

Если к обе части неравенства умножить или разделить на одно и тоже положительное число, то знак неравенства не изменится. А если на отрицательное число, то знак неравенства поменяется на противоположный

$Например: 3 < 5, 2 - положительное, то\ 6 < 10$

$3 < 5, -2 - отрицательное, то\ \text{-}6 > -10$

$Следствие: Если\ а\ и\ в\ положительные\ числа,$

$а < в, то\ \frac{1}{а} > \frac{1}{в}$

$Например: 3 < 5, то \frac{1}{3} > \frac{1}{5}$

$Например: \quad 3 < a < 5$

$Оценить: а)3a; б)-4a; в)a+5; г)6-a$

$а)3 < a < 5$

$9 < 3a < 15$

$б)3 < a < 5$

$-20 < -4a < -12$

$в)3 < a < 5$

$8 < a+5 < 10$

$г)3 < a < 5$

$-5 < -a < -3$

$1 < 6-a < 3$

Теорема 5. Если а<в, с<д, то а+с<в+д

$$Например:\quad \begin{array}{c} 3<5, \\ 6<8 \\ \hline 9<13 \end{array}$$

Теорема 6. Если а<в, с<д, где а,в,с,д-положительные числа то ас<вд

$$Например:\quad \begin{array}{c} 3<5 \\ 6<8 \\ \hline 18<40 \end{array}$$

$Следствие:$

$Если\ a\ и\ в\ положительны\ и\ a < в, то\ a^n < в^n$

$n - натуральное\ число$

$Например:$

$$3 < 5$$

$$3^2 < 5^2$$

$$9 < 25$$

Например:

1) a – *положительное число. Доказать,*

$$a + \frac{1}{a} \geq 2$$

Доказательство:

Рассмотрим разность

$$a + \frac{1}{a} - 2 = \frac{a^2 + 1 - 2a}{a} = \frac{(a-1)^2}{a} \geq 0$$

Значит $a + \frac{1}{a} \geq 2$

2)*Сравните числа*

$$a)\sqrt{5} < \sqrt{7}$$

$$б)\sqrt{3}+\sqrt{6} \text{ и } 2+\sqrt{5}$$

Все числа положительны

$$(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2 = 3+2\sqrt{18}+6 = 9+\sqrt{72}$$

$$(2+\sqrt{5})^2 = 4+4\sqrt{5}+5 = 9+\sqrt{80}$$

так как $\sqrt{72} < \sqrt{80}$, *то* $\sqrt{3}+\sqrt{6} < 2+\sqrt{5}$

$$в)\pi+\sqrt{10} \text{ и } 4+\sqrt{11}$$

$\pi < 4$ $\quad$ $\sqrt{10} < \sqrt{11}$, *то* $\pi+\sqrt{10} < 4+\sqrt{11}$

$3)$ *Дано:* $2 < a < 3$

$$4 < в < 5$$

Оценить: $а) a + в;\ б) a - в;\ в) a \cdot в;\ г) \frac{a}{в}$

Решение:

$а)\ 2 < a < 3$

$$\frac{\begin{array}{c} 2 < a < 3 \\ 4 < в < 5 \end{array}}{6 < a + в < 8}$$

$б)\ 2 < a < 3$

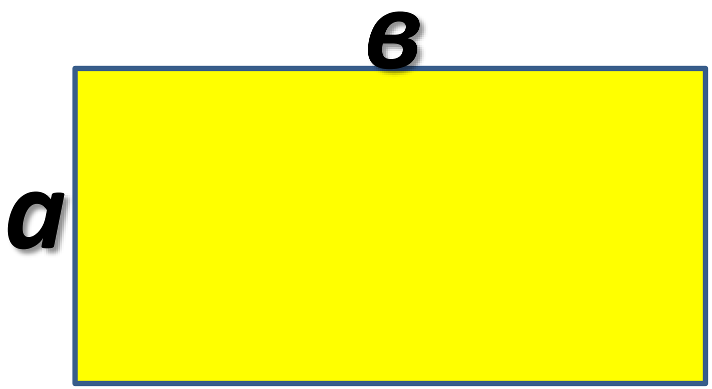
$$\frac{\begin{array}{c} 2 < a < 3 \\ -5 < -в < -4 \end{array}}{-3 < a - в < -1}$$

$в)\ 2 < a < 3$

$$\frac{\begin{array}{c} 2 < a < 3 \\ 4 < в < 5 \end{array}}{8 < aв < 15}$$

$г)\ 2 < a < 3$

$$\frac{\begin{array}{c} 2 < a < 3 \\ \frac{1}{5} < \frac{1}{в} < \frac{1}{4} \end{array}}{\frac{2}{5} < \frac{a}{в} < \frac{3}{4}}$$



$$2 < a < 3$$

$$4 < в < 5$$

Найти P и S

$$P = 2(a + в)$$

$$\begin{array}{c} 2 < a < 3 \\ 4 < в < 5 \\ \hline 12 < P < 16 \end{array}$$

$$S = a \cdot в$$

$$\begin{array}{c} 2 < a < 3 \\ 4 < в < 5 \\ \hline 8 < S < 15 \end{array}$$