

Квадратный трехчлен



Квадратный трехчлен и его корни

*Квадратным трехчленом называется
многочлен вида $ax^2 + vx + c$, где x – переменная
 a, v, c – некоторые числа, причем $a \neq 0$*

**Коэффициент a называют старшим
коэффициентом, c – свободным членом**

Например: $3x^2 - 6x + 7$; $x^2 - 5x + 1$

К квадратным трехчленам относятся даже те, у которых коэффициенты b или c равны 0 или оба одновременно.

Например: $x^2 + 2x$; $3x^2 - 7$; $6x^2$

Для того, чтобы найти корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, надо решить уравнение $ax^2 + bx + c = 0$

1) Найти корни квадратного трехчлена

$$3x^2 - 2x - 5$$

$$3x^2 - 2x - 5 = 0$$

$$a = 3; b = -2; c = -5; k = -1$$

$$\frac{D}{4} = k^2 - ac = 1 + 15 = 16 > 0 \text{ (2 корня)}$$

$$x_{1;2} = \frac{-k \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a} = \frac{1 \pm 4}{3}$$

$$x_1 = \frac{5}{3}; \quad x_2 = -1$$

Ответ: $\frac{5}{3}; -1$.

2) Выделить из трехчлена квадрат двучлена

Представление квадратного трехчлена

$$ax^2 + vx + c = a(x - t)^2 + n$$

называется выделением квадрата

двучлена из квадратного трехчлена.

$$2x^2 + 4x - 2$$

$$\begin{aligned} 2x^2 + 4x - 2 &= 2(x^2 + 2x - 1) = 2(x^2 + 2x + 1 - 1 - 1) = \\ &= 2((x + 1)^2 - 2) = 2(x + 1)^2 - 4 \end{aligned}$$

3) Докажите, что из всех прямоугольников с $P=20$ см наибольшую площадь имеет квадрат

Пусть одна сторона прямоугольника x см, тогда вторая $(10-x)$ см и $S = x(10-x)$

$S = 10x - x^2 = -x^2 + 10x$ – квадратный трехчлен
Выделим квадрат двучлена из квадратного

трехчлена

$$\begin{aligned} -x^2 + 10x &= -(x^2 - 10x) = -(x^2 - 10x + 25 - 25) = \\ &= -((x - 5)^2 - 25) = -(x - 5)^2 + 25 \end{aligned}$$

Так как выражение $-(x-5)^2 \leq 0$, то сумма $-(x-5)^2 + 25$ принимает наибольшее значение при $x = 5$

Другая сторона равна 5

Ответ: Прямоугольник является квадратом

$$\begin{aligned} 4) 3x^2 - 36x + 140 &= 3\left(x^2 - 12x + \frac{140}{3}\right) = \\ &= 3\left(x^2 - 12x + 36 - 36 + \frac{140}{3}\right) = 3\left((x-6)^2 + \frac{32}{3}\right) = \\ &= 3(x-6)^2 + 32 \end{aligned}$$

Разложение квадратного трехчлена на множители

Теорема: Если x_1 и x_2 корни квадратного трехчлена $ax^2 + vx + c$, то $ax^2 + vx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Например: 1) Разложить на множители

$$3x^2 - 10x + 3$$

$$3x^2 - 10x + 3 = 3(x - x_1)(x - x_2)$$

$$3x^2 - 10x + 3 = 3(x - x_1)(x - x_2)$$

$$3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$a = 3; b = -10; c = 3; \kappa = -5$$

$$\frac{D}{4} = \kappa^2 - ac = 25 - 9 = 16 > 0 (2\kappa)$$

$$x_{1;2} = \frac{-\kappa \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a} = \frac{5 \pm 4}{3}$$

$$x_1 = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = 3$$

$$3x^2 - 10x + 3 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 3) = (3x - 1)(x - 3)$$

2) *Разложить на множители*

$$-4x^2 + 24x - 36$$

$$-4x^2 + 24x - 36 = -4(x - x_1)(x - x_2)$$

$$-4x^2 + 24x - 36 = 0 / : (-4)$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x - 3)^2 = 0$$

$$x = 3$$

$$-4x^2 + 24x - 36 = -4(x - 3)(x - 3) = -4(x - 3)^2$$

*Если квадратный трехчлен корней не имеет,
то его нельзя разложить на множители*

3) Сократите дробь

$$\frac{3x+2}{3x^2-13x-10}$$

$$3x^2-13x-10=3(x-x_1)(x-x_2)$$

$$3x^2-13x-10=0$$

$$D = b^2 - 4ac = 169 + 120 = 289 > 0 (2\kappa)$$

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{13 \pm 17}{6} \quad x_1 = 5 \quad x_2 = -\frac{2}{3}$$

$$3x^2-13x-10 = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x-5) = (3x+2)(x-5)$$

$$\frac{3x+2}{3x^2-13x-10} = \frac{3x+2}{(3x+2)(x-5)} = \frac{1}{x-5}$$