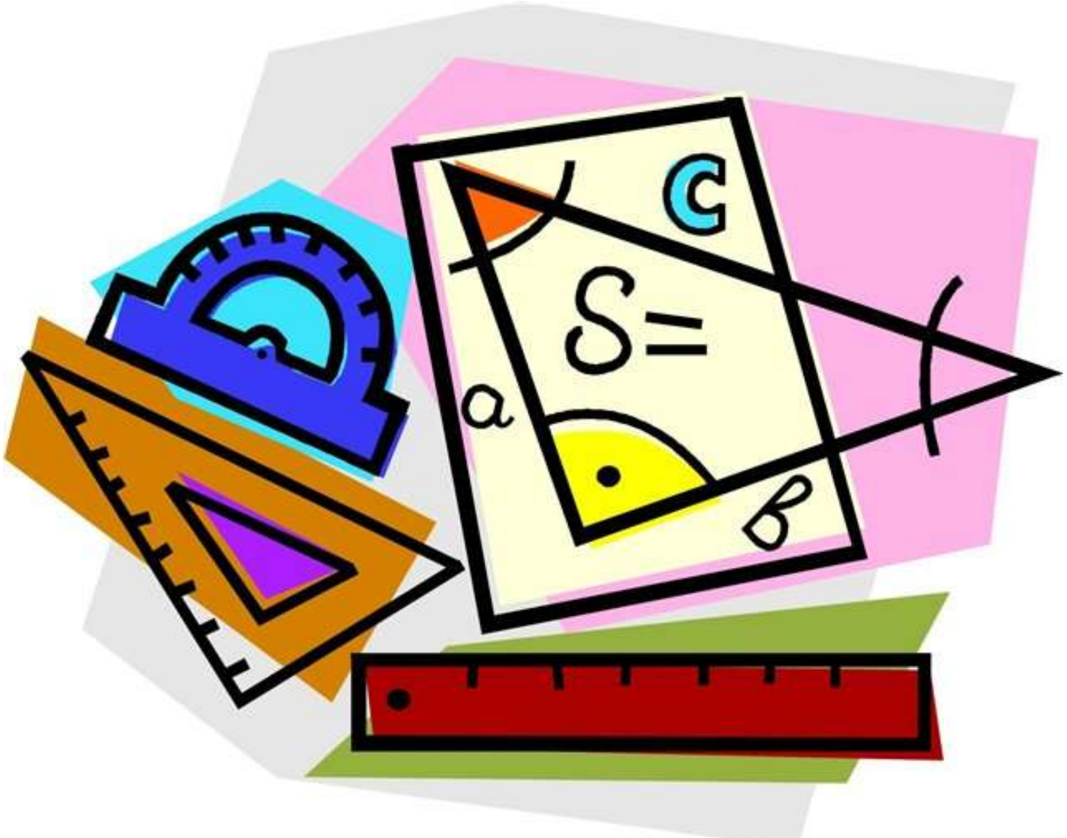
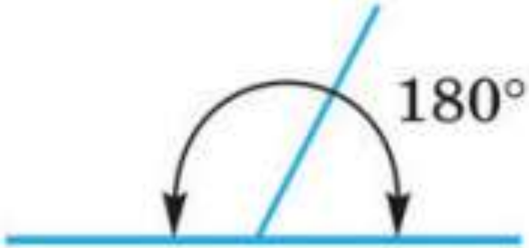
# Планиметрия



# Теория 7 класс

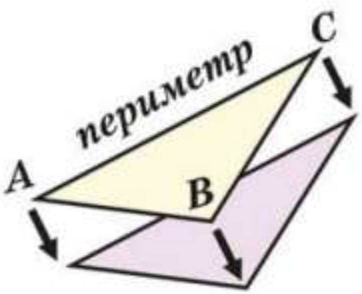
## $T_1$ Смежные




## $T_2$ Вертикальные


$$\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$$
$$\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$$
$$\overline{\angle 1 = \angle 2}$$

# Признаки равенства треугольников



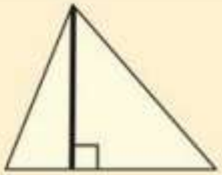

*В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы, и наоборот ...*

**1 ПРИЗНАК**
(по двум сторонам и углу между ними)

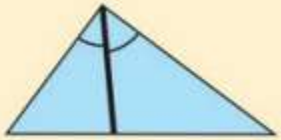
**2 ПРИЗНАК**
(по стороне и двум прилежащим к ней углам)

**3 ПРИЗНАК**
(по трем сторонам)

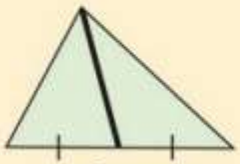
## Равнобедренный треугольник



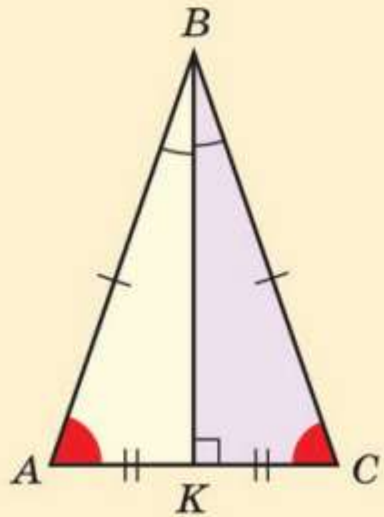
*высота*



*биссектриса*



*медиана*




ПРИЗНАКИ

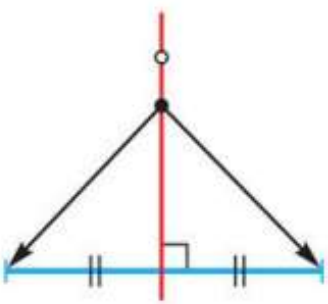
Если два угла равны…
Если высота является медианой…
Если высота является биссектрисой…
Если медиана является биссектрисой…

СВОЙСТВА

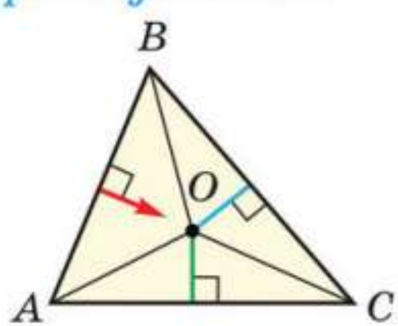
Углы при основании равны.
Биссектриса… является высотой и медианой.

## Серединный перпендикуляр к отрезку

*Любая точка серединного…*
*Если точка равноудалена…*

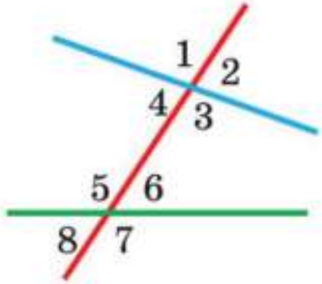


Геометрическое
Место
Точек




**1-я замечательная точка**

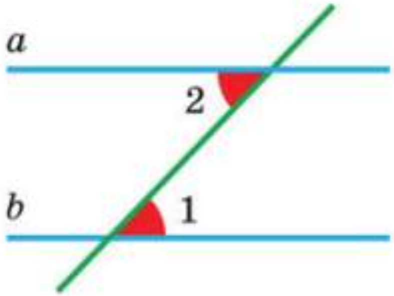
1) $O$ равноудалена от $A$ и $C$
2) $O$ равноудалена от $B$ и $C$
3) Значит, $O$ равноудалена от $A$ и $B$
4) $O$ лежит на третьем серединном перпендикуляре

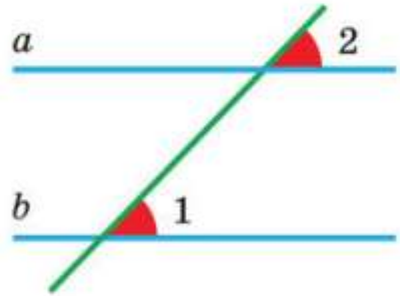


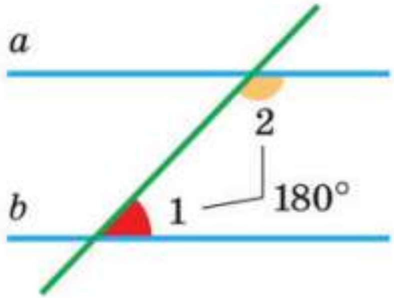

# Параллельные прямые

*накрест лежащие*
*соответственные*
*односторонние*

## Признаки параллельности прямых



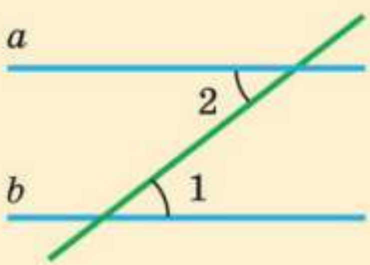



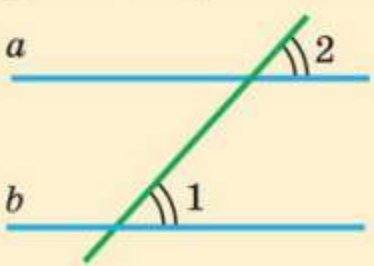



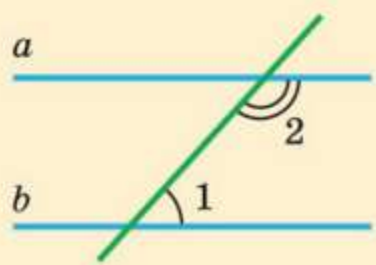

*Если накрест лежащие углы равны,*
*или соответственные углы равны,*
*или сумма односторонних углов равна* 180°, *то* $a \parallel b$.

## Свойства углов при параллельных прямых

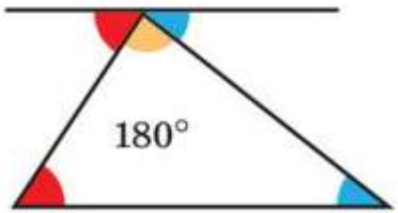
*Если прямые параллельны, то...*

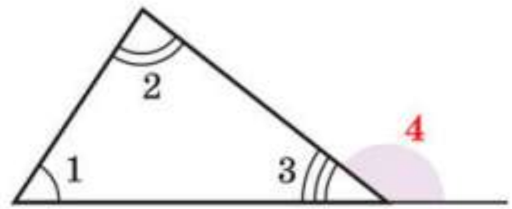


# Сумма углов треугольника



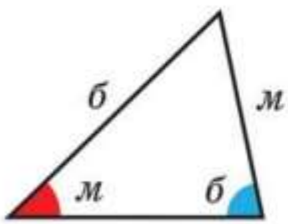




**Внешний угол треугольника**

$\angle 4 = 180° - \angle 3 =$

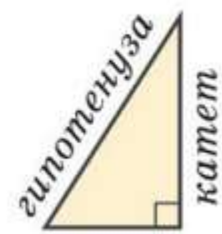
$= \angle 1 + \angle 2$

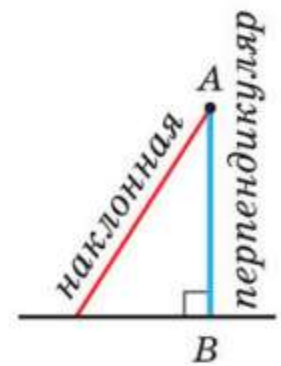
Против большей стороны лежит больший угол.
Против большего угла лежит бо́льшая сторона.




**Следствия**

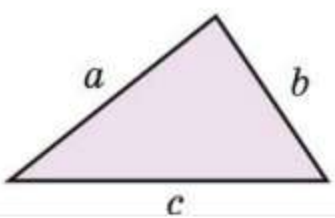
*Катет меньше гипотенузы.*
*Перпендикуляр меньше наклонной.*




$AB$ — расстояние
от точки до прямой

**Неравенство треугольника**



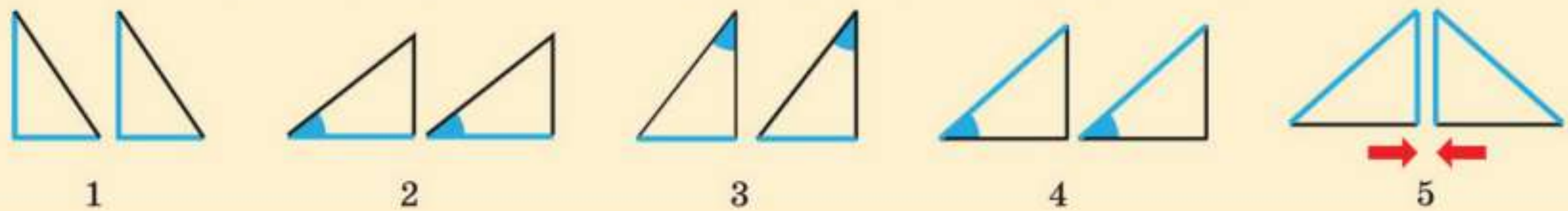

$a < b + c$

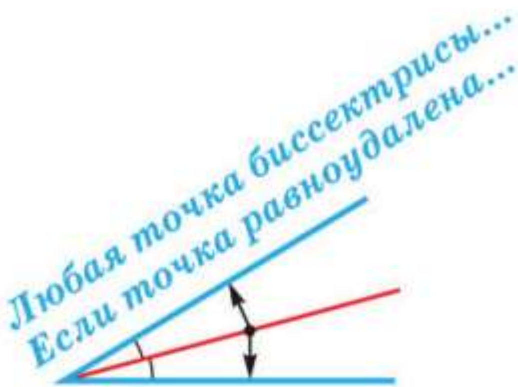
$b < a + c$

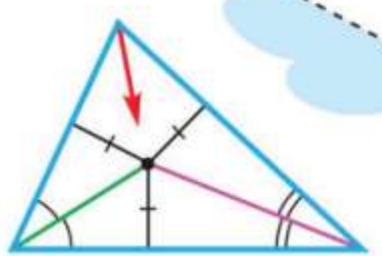
$c < a + b$

*Любая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.*

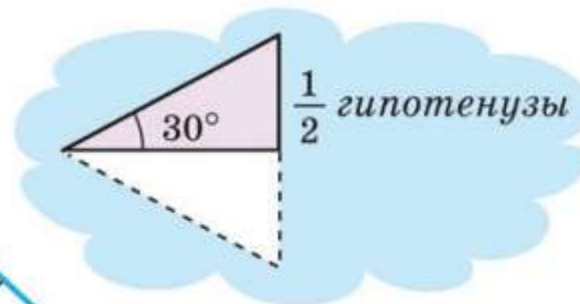
## Признаки равенства прямоугольных треугольников



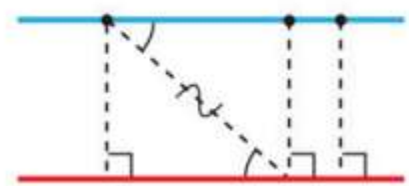



*Биссектрисы... в одной точке.*

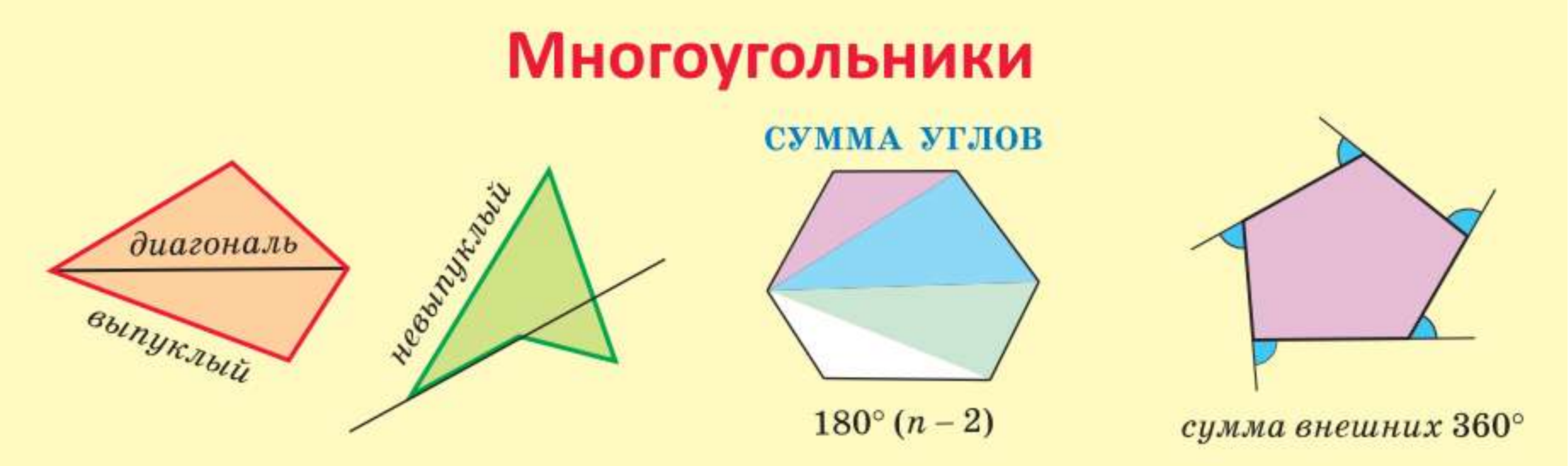



Расстояние между



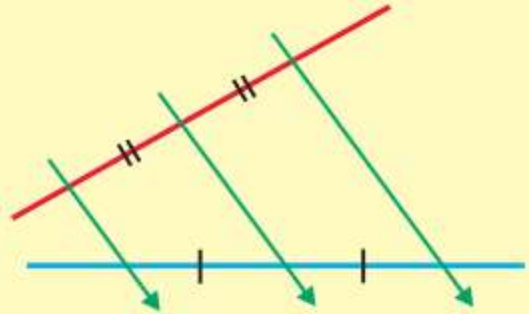
параллельными

# Теория 8 класс

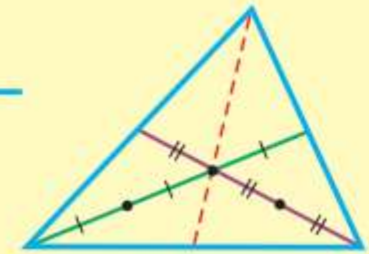


# 4-угольники


## ФАЛЕС (VI в. до н. э.)



**МЕДИАНЫ 2 : 1**



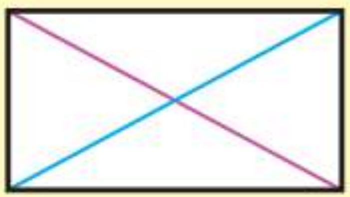
**СВОЙСТВА**

1. Сумма соседних углов 180°.
2. Диагональ делит на два равных тр-ка.
3. Противоположные стороны равны.
4. Противоположные углы равны.
5. Диагонали делятся пополам.

## ПРИЗНАКИ

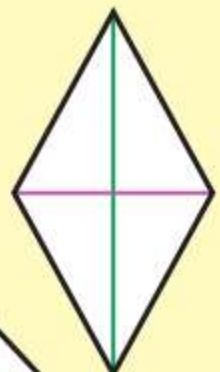
1. Если две стороны 4-ка равны и параллельны…
2. Если противоположные стороны 4-ка равны…
3. Если диагонали 4-ка делятся пополам…

**ПРЯМОУГОЛЬНИК**



*диагонали равны*


**РОМБ**

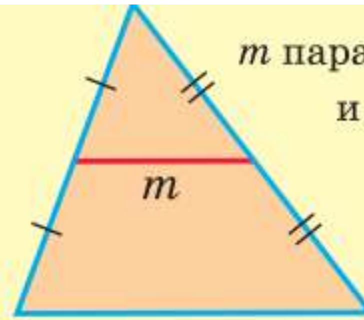


*диагонали*

1) $\perp$

2) бис.

## Средняя линия




$a$

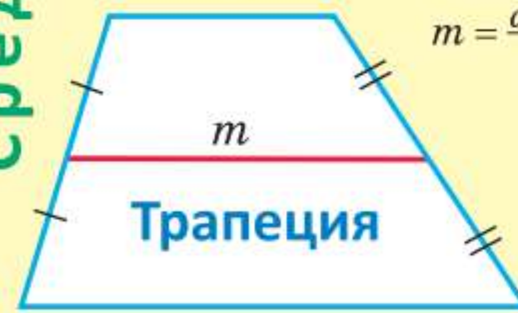
$m$ параллельна $a$

и $m = \frac{a}{2}$

$m$ параллельна $a$ и $b$

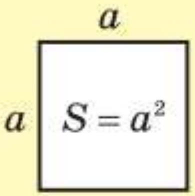
$m = \frac{a+b}{2}$

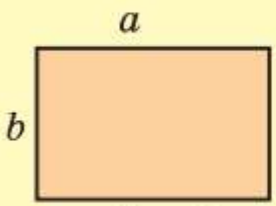
$b$



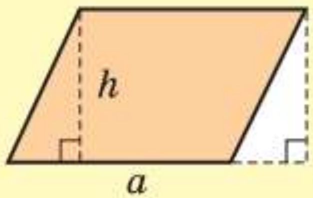

$a$

# Площади

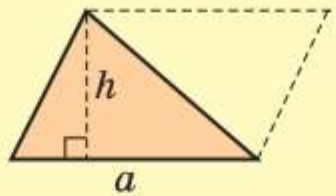


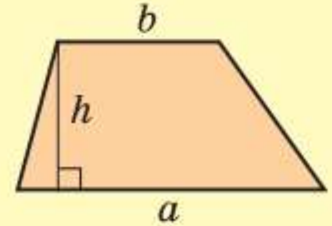

$S = ab$



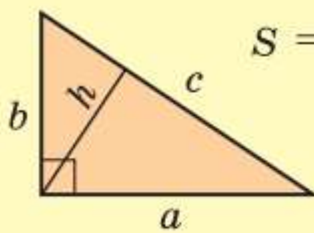

$S = a \cdot h$




$S = \frac{1}{2} a \cdot h$

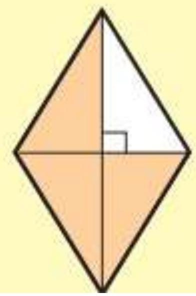



$S = \frac{a+b}{2} \cdot h = mh$



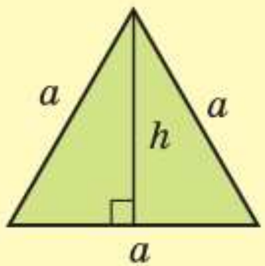

$S = \frac{ab}{2}$

$h = \frac{ab}{c}$

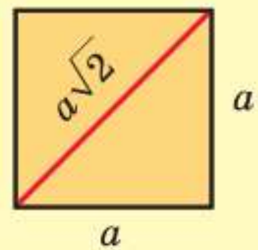


$S = \frac{d_1 d_2}{2}$

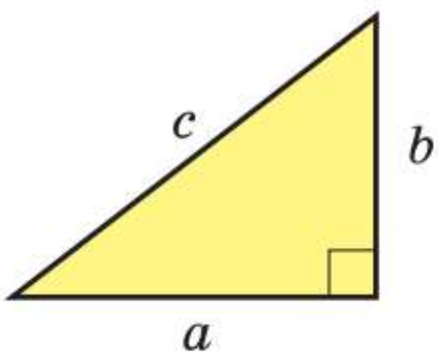
## Равносторонний




$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$




*диагональ квадрата*




## ПИФАГОР

$$a^2 + b^2 = c^2$$

**Обратная**

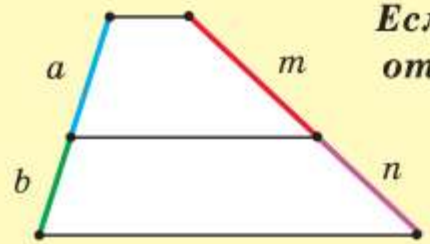
*Пифагоровы тройки:*

**(3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (8, 15, 17)**

# Подобные треугольники

## Теорема Фалеса (обобщ.)

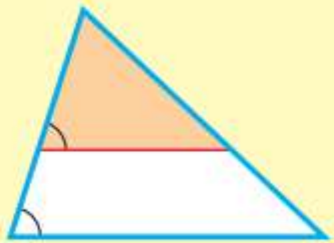
1. Углы – *равны.*
2. Стороны – *пропорциональны.*



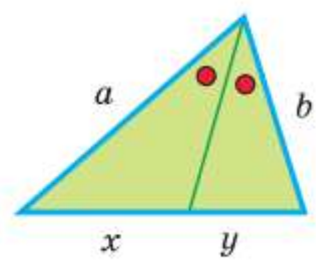

***Если на одной стороне угла отложить...***

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

***Прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает треугольник, подобный данному***



## Свойство биссектрисы треугольника

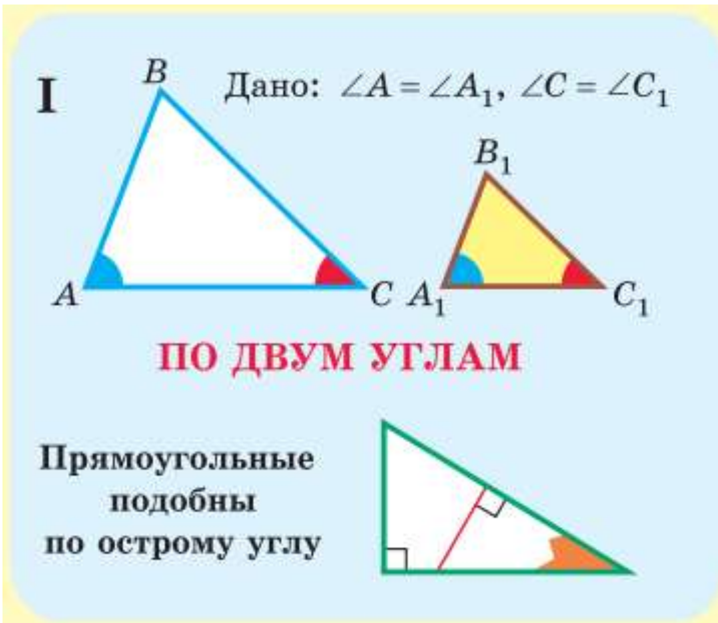


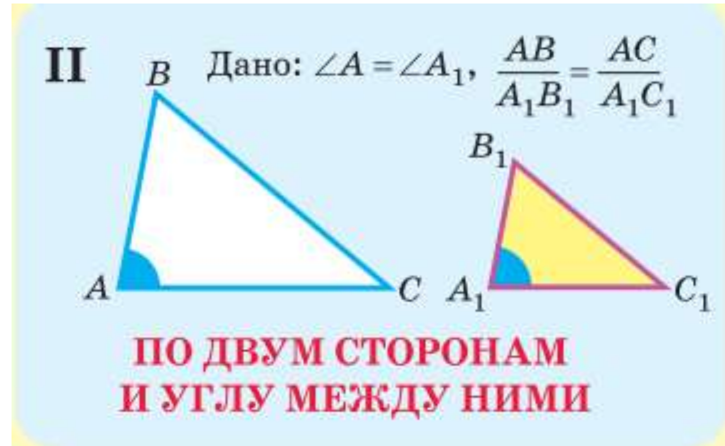

*Биссектриса делит...*

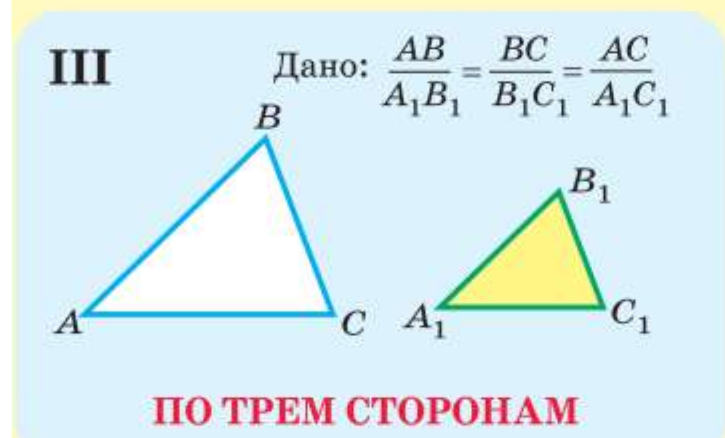
$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

*...пропорциональные прилежащим сторонам*

# Признаки подобия треугольников

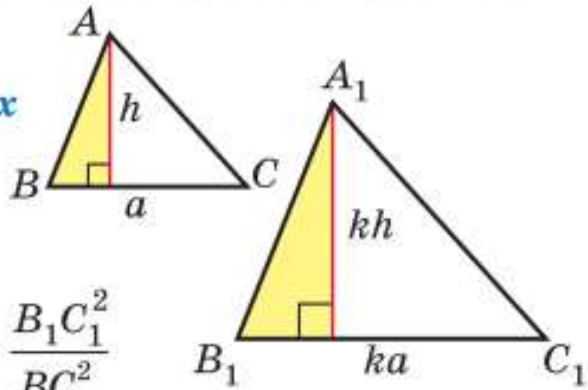


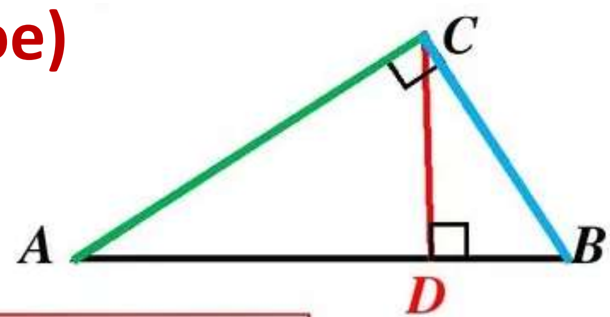
## Площади подобных треугольников

*...как квадраты соответствующих сторон*




$$\frac{S_1}{S}=\frac{\frac{1}{2}\cdot ka\cdot kh}{\frac{1}{2}\cdot a\cdot h}=k^2=\frac{B_1C_1^2}{BC^2}$$

- **Среднее пропорциональное (геометрическое)**

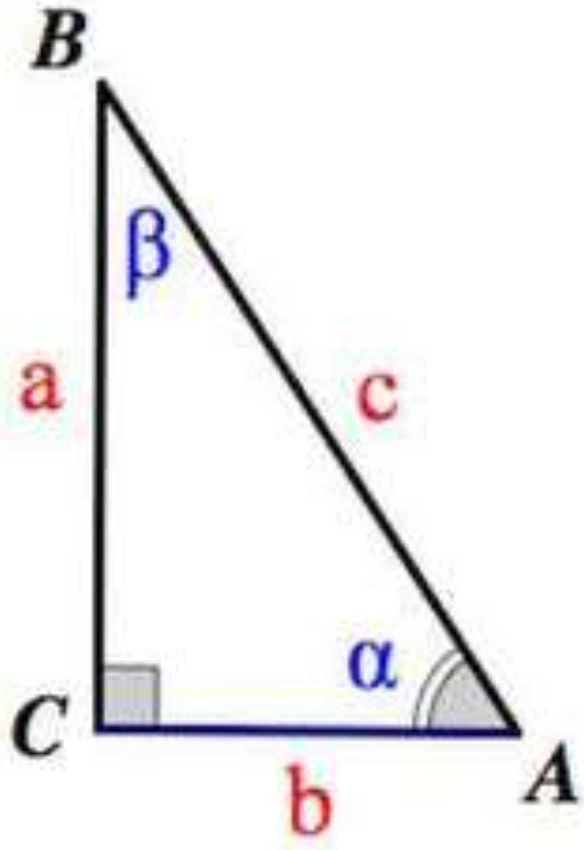



$CD=\sqrt{AD\cdot DB}$

$AC=\sqrt{AB\cdot AD}$

$BC=\sqrt{AB\cdot DB}$

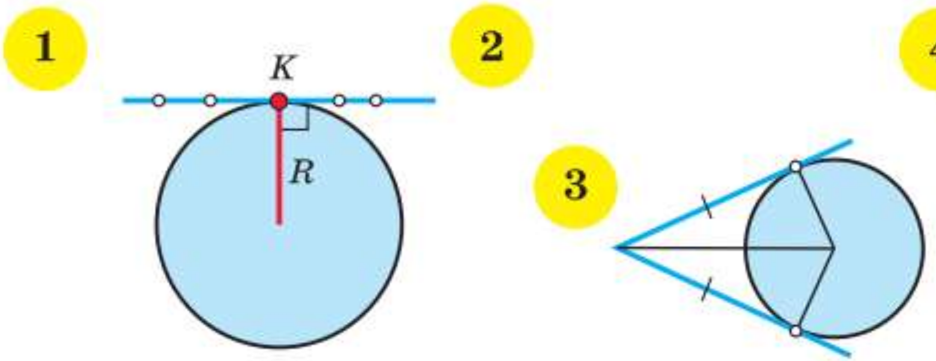
# Решение прямоугольного треугольника

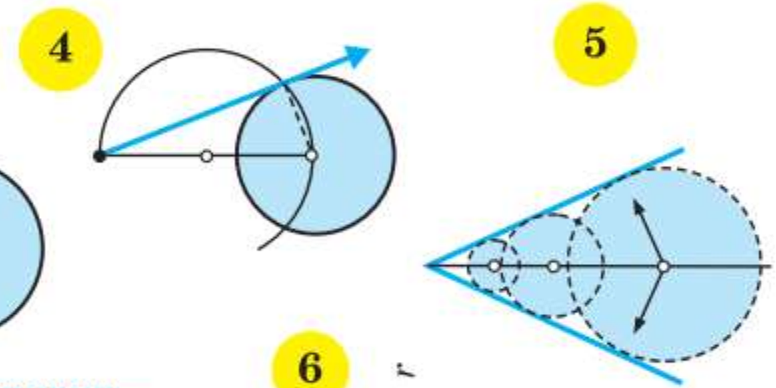



$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

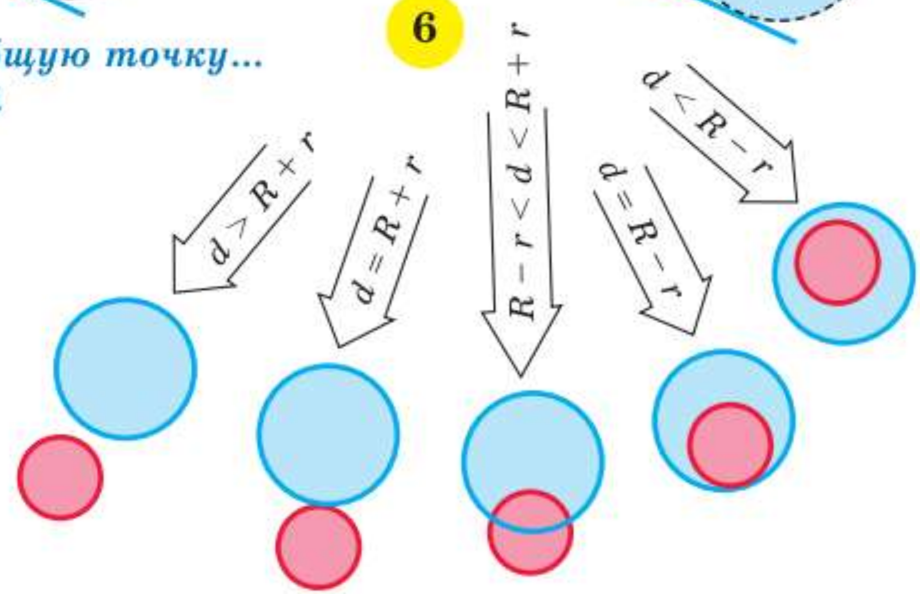
$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}, \qquad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a}$$

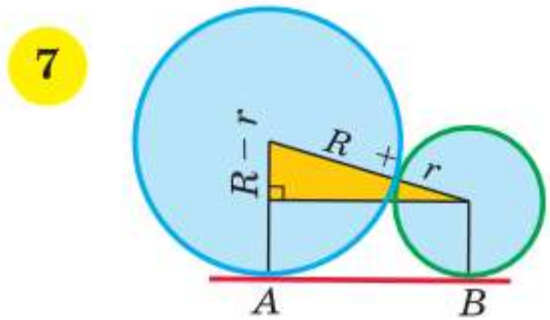
# Окружности




***Касательная имеет единственную общую точку...***
***Радиус перпендикулярен касательной***

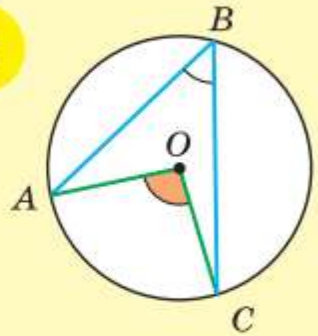



$$AB = \sqrt{(R + r)^2 - (R - r)^2} = 2\sqrt{Rr}$$

# Вписанный – половине центрального угла!

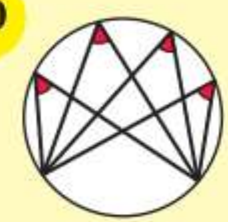
8



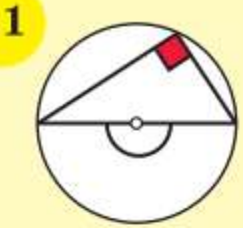

9

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\cup AC$$

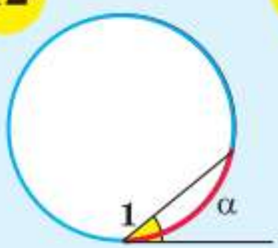
10



11

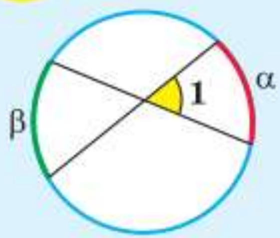


12



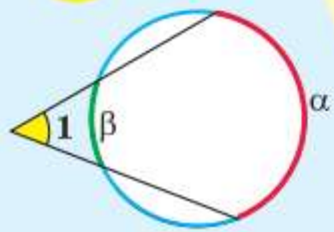

$$\angle 1 = \frac{1}{2}\alpha$$

13




$$\angle 1 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

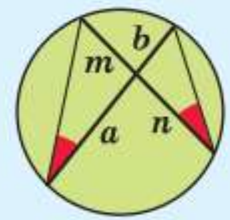
14




$$\angle 1 = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

15

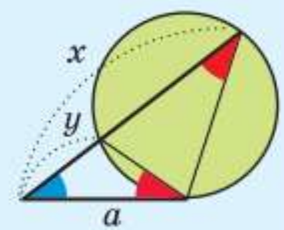
$$\frac{a}{m} = \frac{n}{b}$$




$$ab = mn$$

16

$$\frac{a}{x} = \frac{y}{a}$$

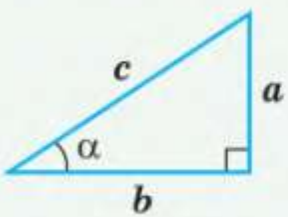



$$a^2 = xy$$

# Теория 9 класс

## Соотношения в прямоугольном треугольнике

### Острый угол

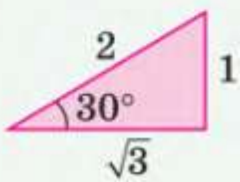


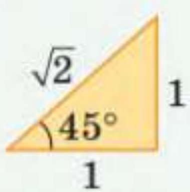

$$\sin\alpha = \frac{a\,(\text{против. к.})}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b\,(\text{прилеж.к.})}{c}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a\,(\text{против. к.})}{b\,(\text{прил. к.})}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$



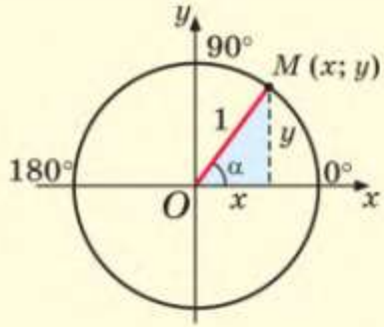

### Основное тригонометрическое тождество

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} \qquad \boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

| | 30° | 45° | 60° |
|---|---|---|---|
| sin | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| cos | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| tg | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |
| ctg | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

## Тупой угол

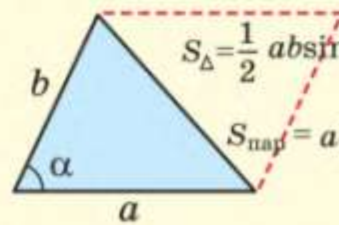



$\sin\alpha = y \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$

$\cos\alpha = x \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$

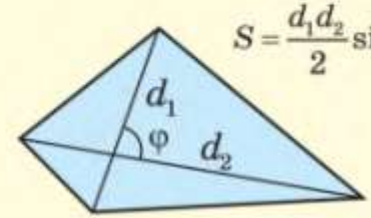
$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

$\sin 150° = \sin 30° = \frac{1}{2} \qquad \cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$




$S_\Delta = \frac{1}{2}\, ab\sin\alpha$

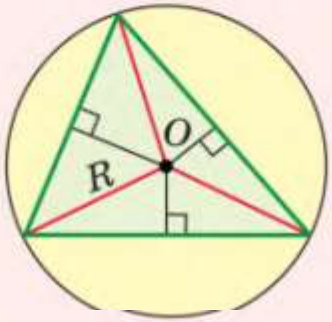
$S_{пар} = ab\sin\alpha$



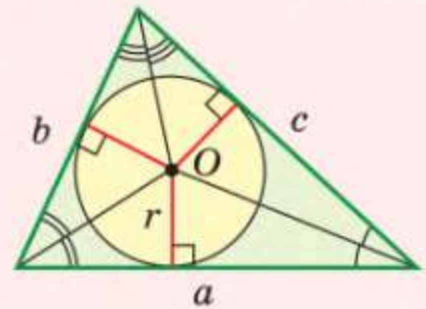

$S = \frac{d_1 d_2}{2}\sin\varphi$

# Описанная и вписанная окружности

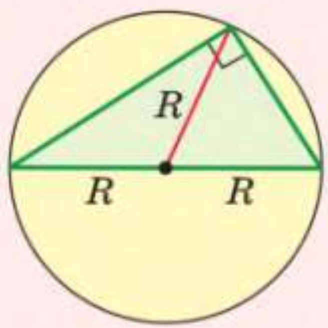
**1** **Описанная — серединных ⊥-ов**




**3** **Вписанная — биссектрис**




**2** **Прямоугольный**

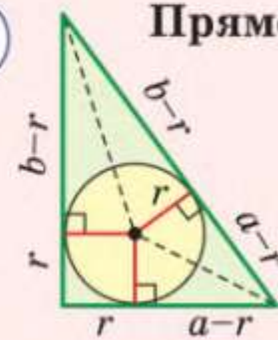



$$R = \frac{c}{2}$$

**4**

$$S = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = pr$$

**5** **Прямоугольный**



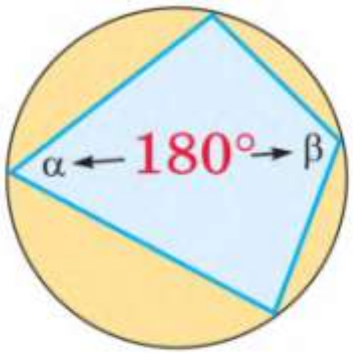

$$c = (a-r) + (b-r)$$

$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

# ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

6 **Вписанные**

свойство

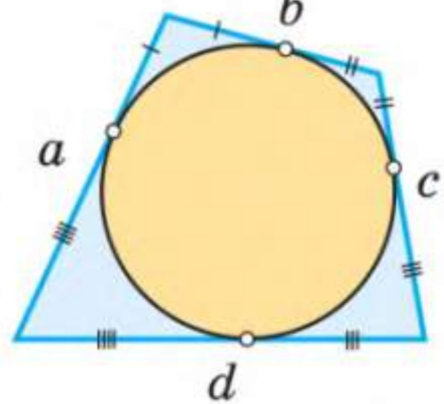



признак

7

8 **Описанные**

свойство

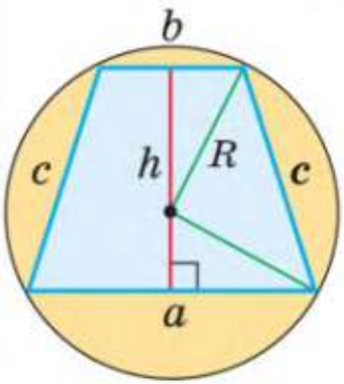



признак

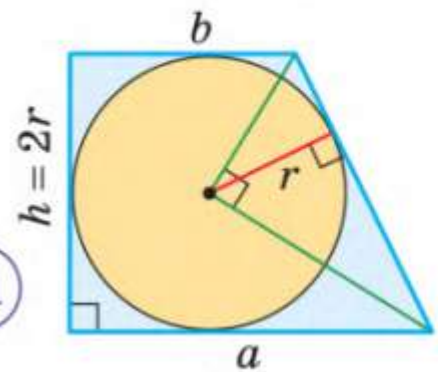
9

$$\boxed{a + c = b + d}$$

10 **Вписанная трапеция — равнобедренная трапеция**




11

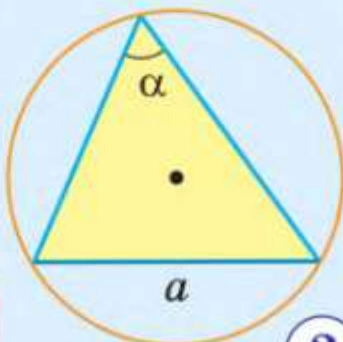


# Теорема синусов и теорема косинусов

## 1 Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

**Стороны тр-ка пропорциональны ...**




$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$$

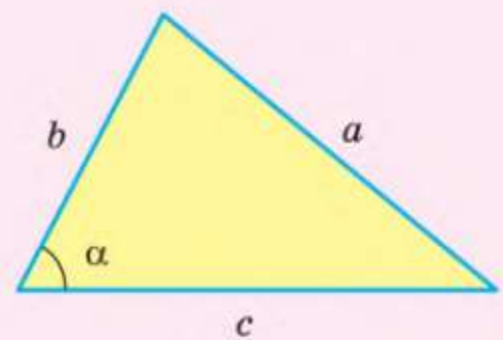
2

$$R = \frac{abc}{4S}$$

## 3 Теорема косинусов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

**Квадрат любой стороны тр-ка равен ...**



**④ Нахождение косинуса угла по трем сторонам**

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

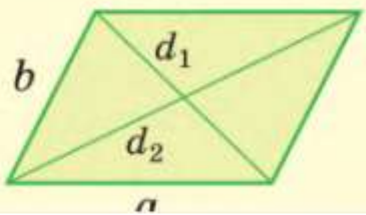
⑤

$b^2 + c^2 > a^2$ угол $\alpha$ острый

$b^2 + c^2 = a^2$ угол $\alpha$ прямой

$b^2 + c^2 < a^2$ угол $\alpha$ тупой

**⑥ Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна ...**




$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$$

**⑦ Формула медианы**

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$

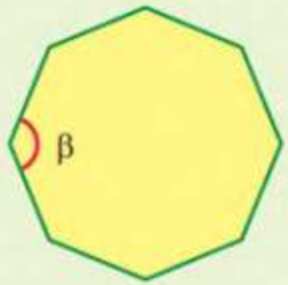
## Формула Герона

⑧ $$S_\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

# Правильные многоугольники

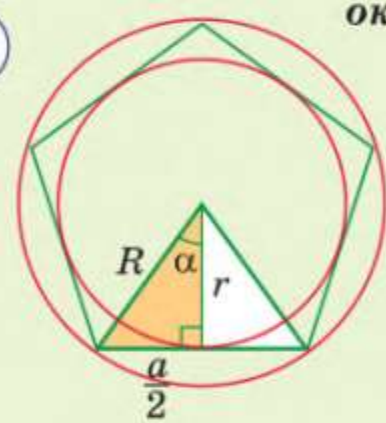
***Можно описать и вписать окружности с общим центром***

**1**




$$\beta = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$$

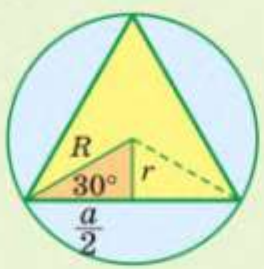
**2**




$$\alpha = \frac{180^\circ}{n}$$

$$\frac{a}{2} = R\sin\alpha \qquad \frac{a}{2} = r\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

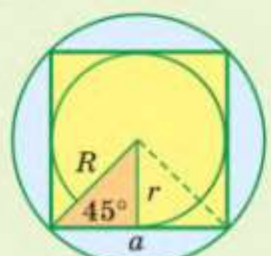
**3**




$$a = R\sqrt{3}$$

$$r = \frac{R}{2}$$

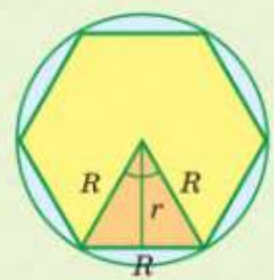
**4**




$$a = R\sqrt{2}$$

$$r = \frac{a}{2}$$

**5**




$$a = R$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

**6** **Длина окружности**

$$C = 2\pi R$$

**7** **Площадь круга**

$$S = \pi R^2$$

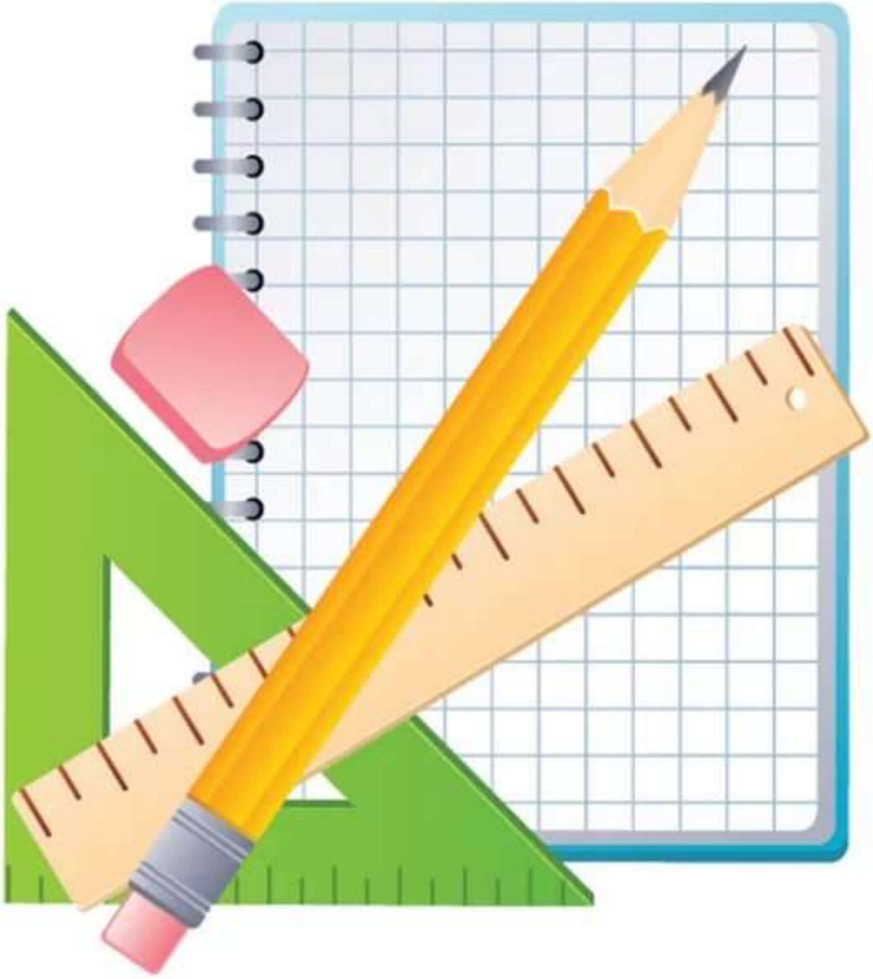
**8**

$$\boxed{\frac{l_{\text{дуги}}}{C} = \frac{n^\circ}{360^\circ} = \frac{S_{\text{сек}}}{S_{\text{круга}}}}$$

**9**


$\pi \approx 3{,}14159\ \ldots$

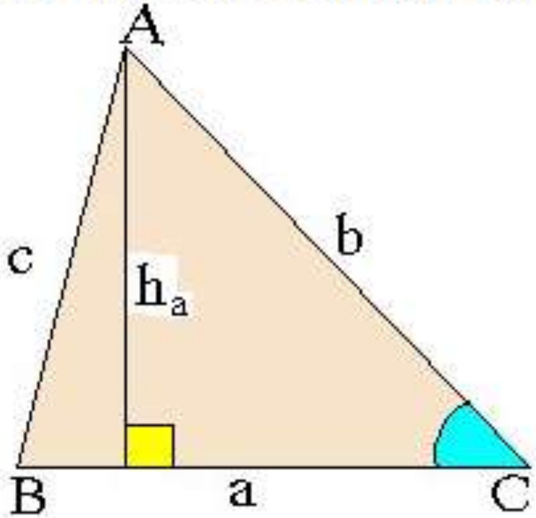
# Теория 7,8,9 классы



# Треугольники общего вида

**Теорема Пифагора**: квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов, то есть $AB^2 = BC^2 + AC^2$

**2) Формулы площади треугольника**




$1) S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$

$2) S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot SinC$

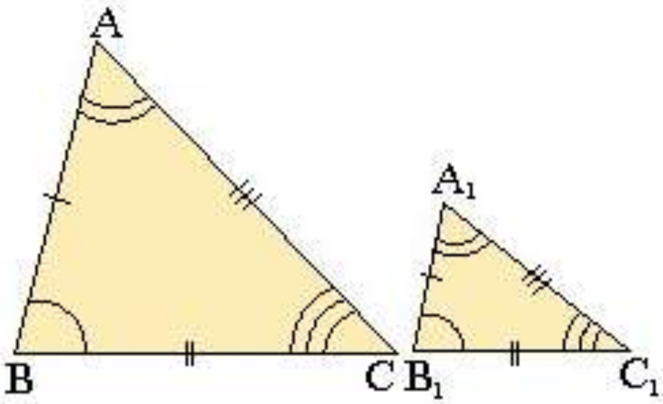
$3) S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

где $p = \frac{a+b+c}{2}$ (Формула Герона)

$4) S = p \cdot r$, где r- вписанной окружности

$5) S = \frac{abc}{4R}$, где R – радиус описанной окружности

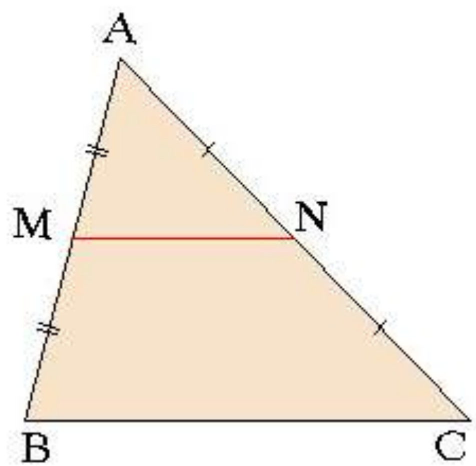
## 3) Подобие треугольников




**Определение:** два треугольника называются подобными, если у них соответствующие углы равны и соответствующие стороны пропорциональны, то есть

$$\angle A = \angle A_1; \angle B = \angle B_1; \angle C = \angle C_1 \text{ и } \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$$

**Обозначение:** $\triangle\ ABC \sim \triangle\ A_1B_1C_1$

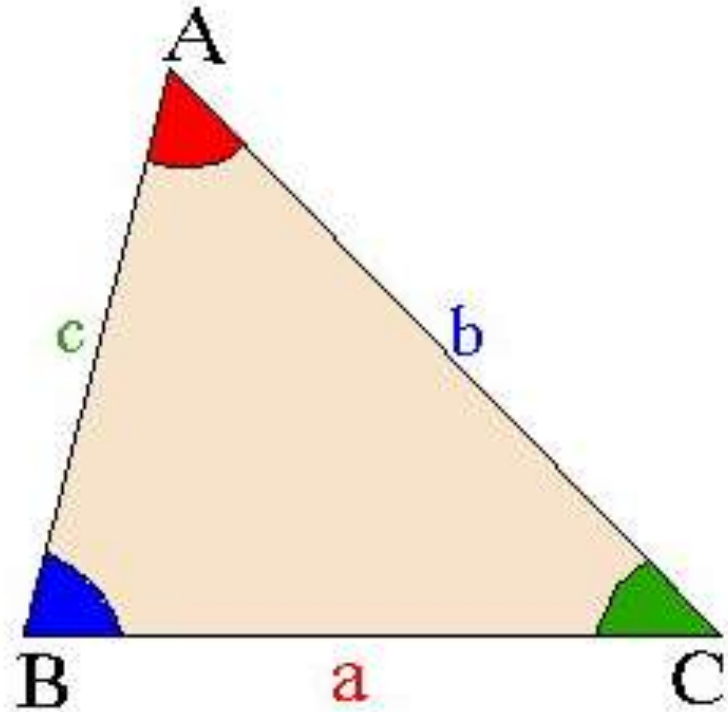



**Теорема:** Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух его сторон параллельна третьей стороне и равна ее половине.

То есть $MN || BC$ и $MN = \frac{1}{2}BC$

**Теорема синусов:** Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов и каждое отношение стороны к синусу равно диаметру описанной около треугольника окружности.

То есть $\frac{a}{sina} = \frac{b}{sinb} = \frac{c}{sinc} = 2R$




**Теорема косинусов:** Квадрат стороны треугольника равне сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на синус угла между ними, то есть

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bcCosA$

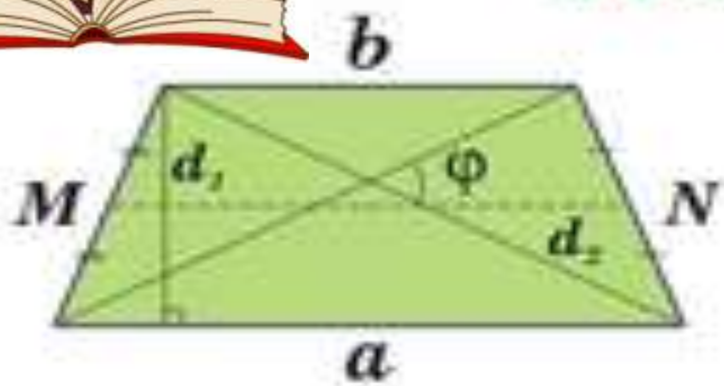
$b^2 = a^2 + c^2 - 2acCosB$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2abCosC$

# Параллелограммы

# Трапеция

## ТРАПЕЦИЯ

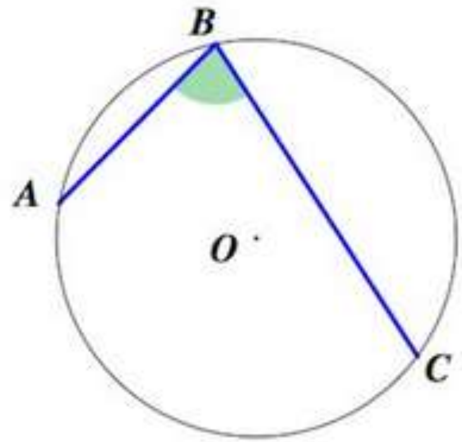



$$S=\frac{a+b}{2}h=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$$

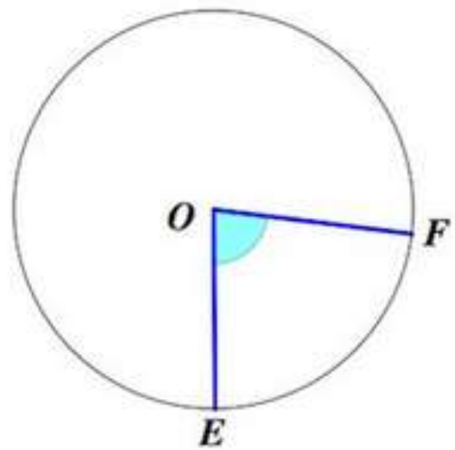
*MN*-средняя линия

$$MN=\frac{1}{2}(a+b)$$

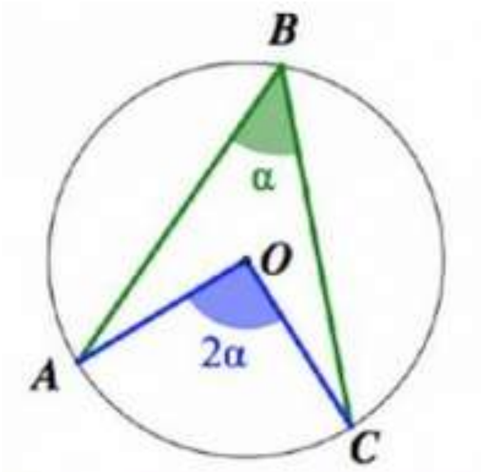
# Центральные и вписанные углы.

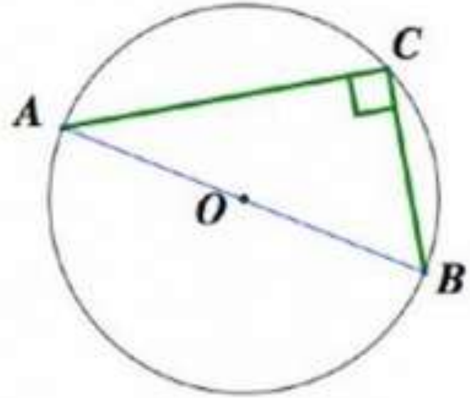


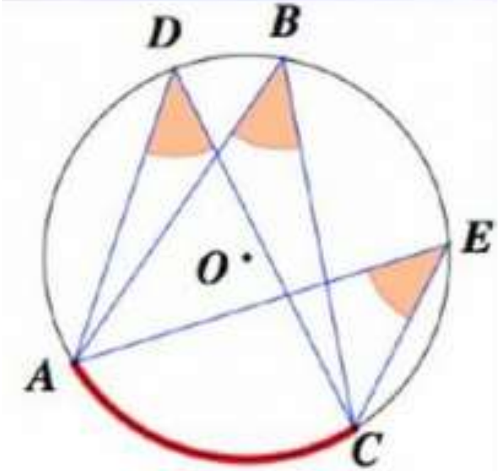

$\angle ABC$ - вписанный



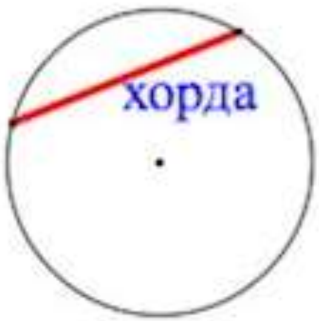

$\angle EOF$ - центральный



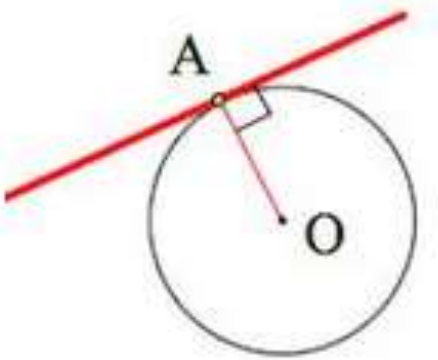



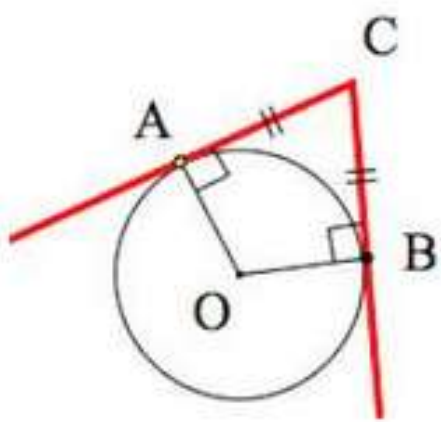
# Окружность,касательная, хорда, секущая

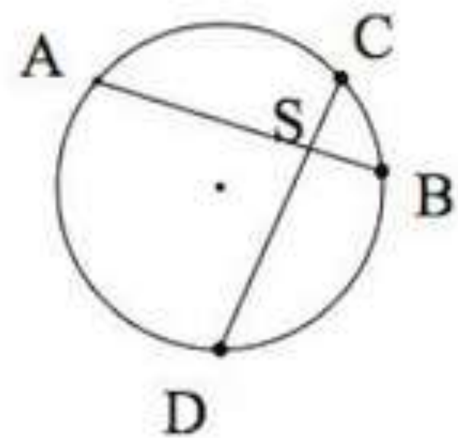




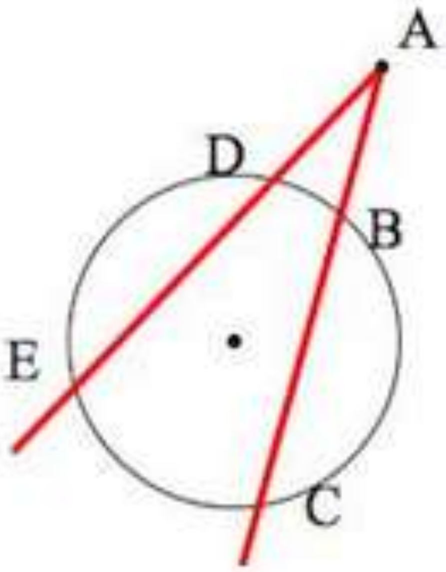


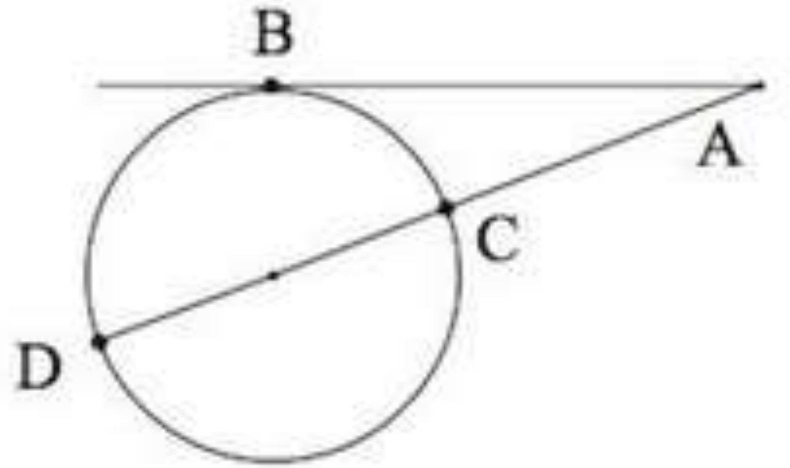



$$AS \cdot SB = CS \cdot DS$$




$$AB \cdot AC = AD \cdot AE$$

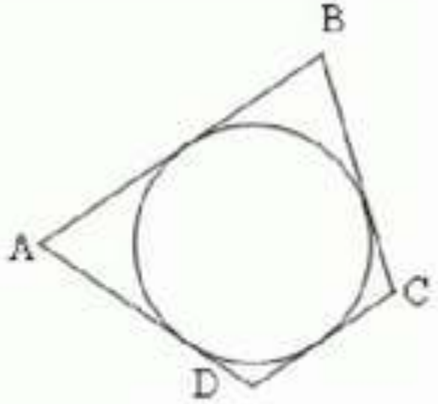
$$AB^2 = AC \cdot AD$$

$$C = 2\pi r$$

$$S = \pi r^2$$

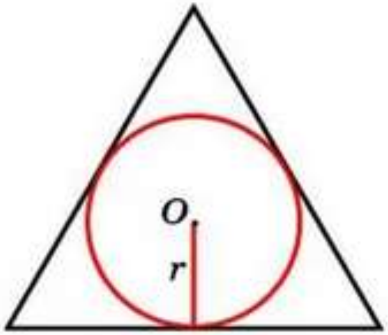
# Вписанные окружности

| | |
|---|---|
| треугольник | $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$ |
| квадрат | $r = \frac{a}{2}$ |
| шестиугольник | $r = \frac{\sqrt{3}a}{2}$ |



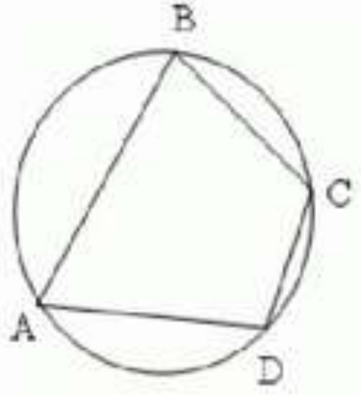

В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.

AB + CD = AD + BC




$$S = \frac{1}{2}Pr$$

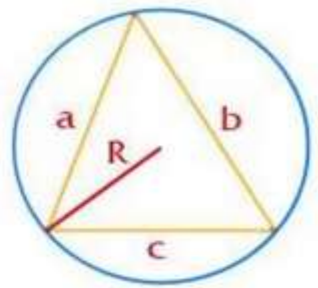
# Описанные окружности




В любом вписанном четырехугольнике сумма противолежащих углов равна 180°.

**∠A+∠C=∠B+∠D**

| | |
|---|---|
| треугольник | $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$ |
| квадрат | $R = \frac{a}{\sqrt{2}}$ |
| шестиугольник | $R = a$ |




$$S = \frac{abc}{4R}$$