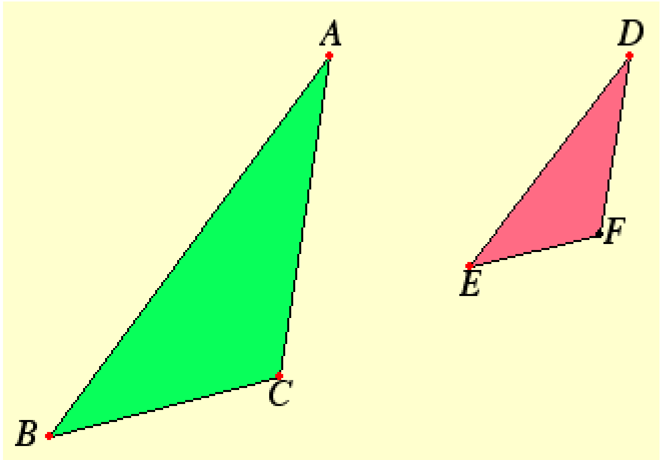
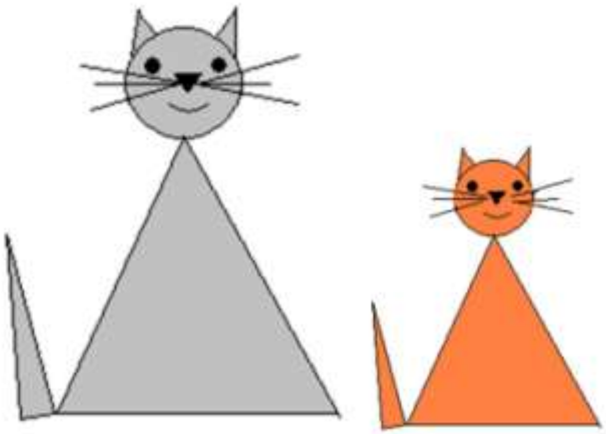
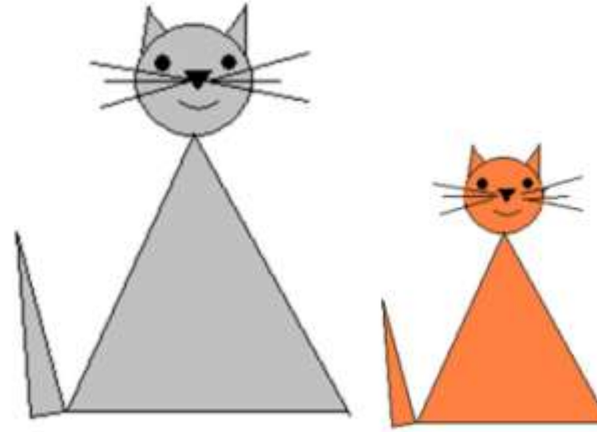
Подобные треугольники

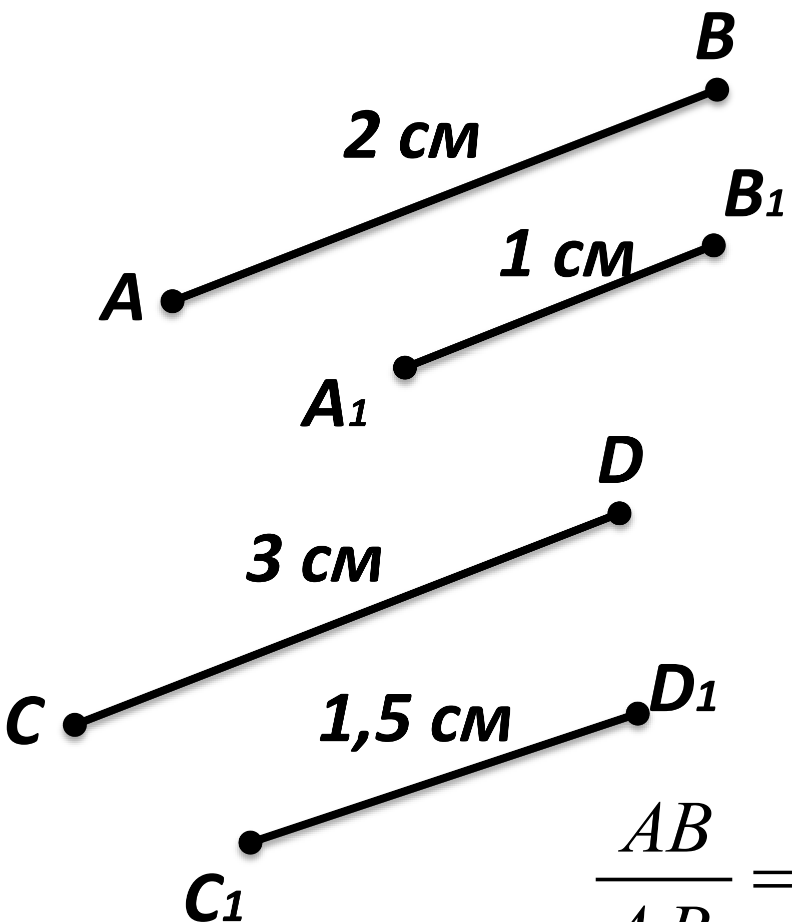








Определение подобия треугольников

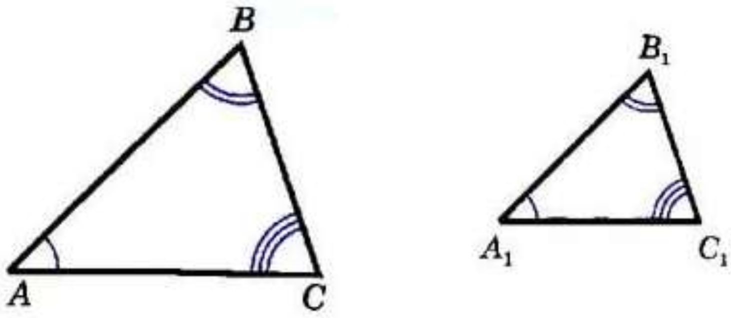


$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{CD}{C_1D_1} = \frac{3}{1{,}5} = 2$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$$

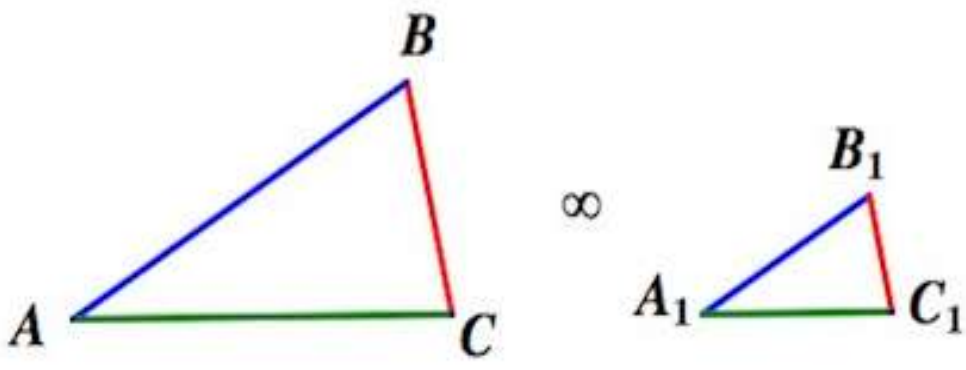
пропорциональны



$$\left.\boxed{\begin{array}{c} AB \text{ и } A_1B_1; \\ AC \text{ и } A_1C_1; \\ BC \text{ и } B_1C_1 \end{array}}\right. - \textit{сходственные}$$

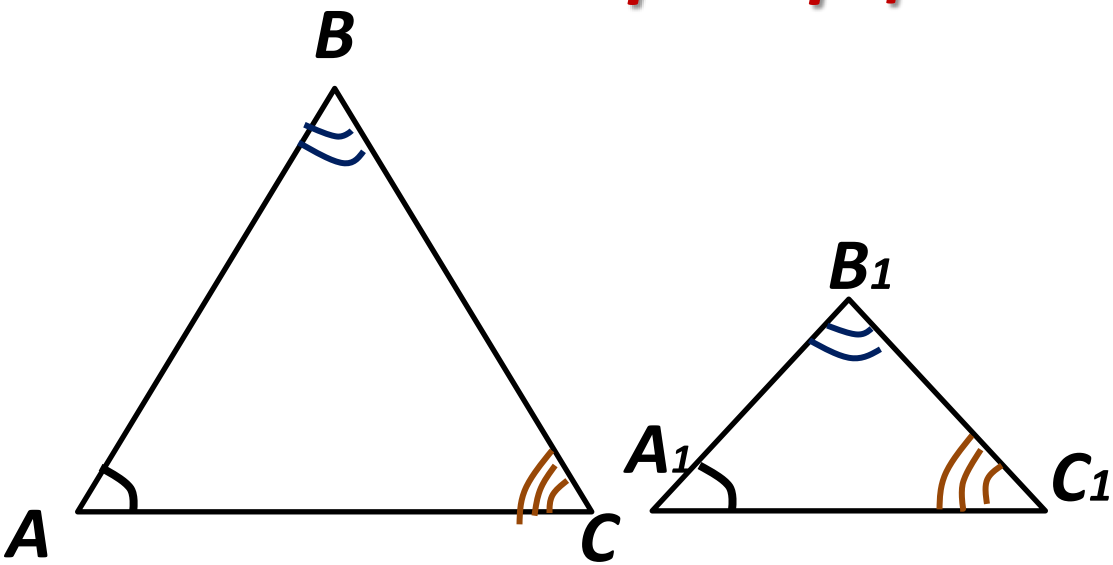
Коэффициентом подобия называют число **k**, равное отношению сходственных сторон подобных треугольников.

Сходственные (или соответственные) стороны подобных треугольников – стороны, лежащие напротив равных углов.



$$k = \frac{AB}{A_1B_1}$$

Опр. **Два треугольника подобны, если их углы равны, а сходственные стороны пропорциональны.**



$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

$\angle A = \angle A_1$

$\angle B = \angle B_1$

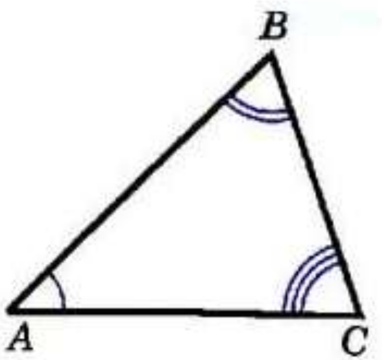
$\angle C = \angle C_1$

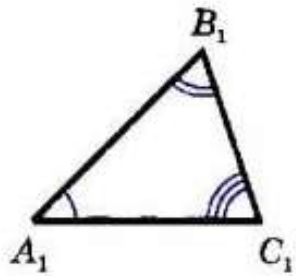
$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{CB}{C_1B_1}$**=k –коэффициент пропорциональности**

Коэффициент подобия

Теорема: Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = k^2$$

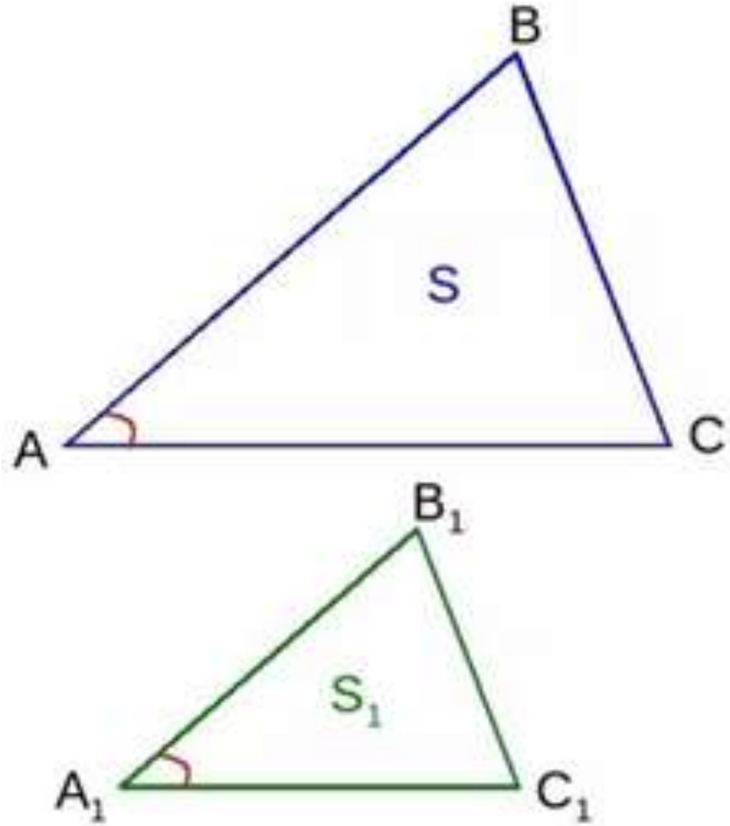




Дано: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

Доказать: $\dfrac{S}{S_1} = k^2$

Доказательство:



$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$$

$\angle A = \angle A_1$ *значит*

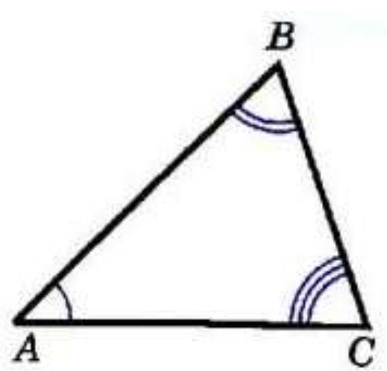
$$\frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$$

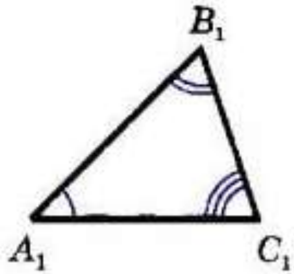
$$\frac{AB}{A_1B_1} = k \qquad \frac{AC}{A_1C_1} = k$$

$$\frac{S}{S_1} = k^2$$

Теорема: Отношение периметров двух подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

$$\frac{P}{P_1} = к$$

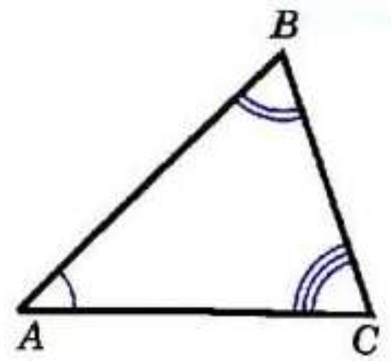


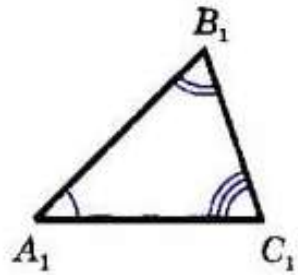


$Дано: \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

$Доказать: \dfrac{P}{P_1} = k$

$Доказательство:$





$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$$

$$AB = \kappa \cdot A_1B_1$$

$$BC = \kappa \cdot B_1C_1$$

$$AC = \kappa \cdot A_1C_1$$

$$\frac{P}{P_1} = \frac{AB + BC + AC}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} =$$

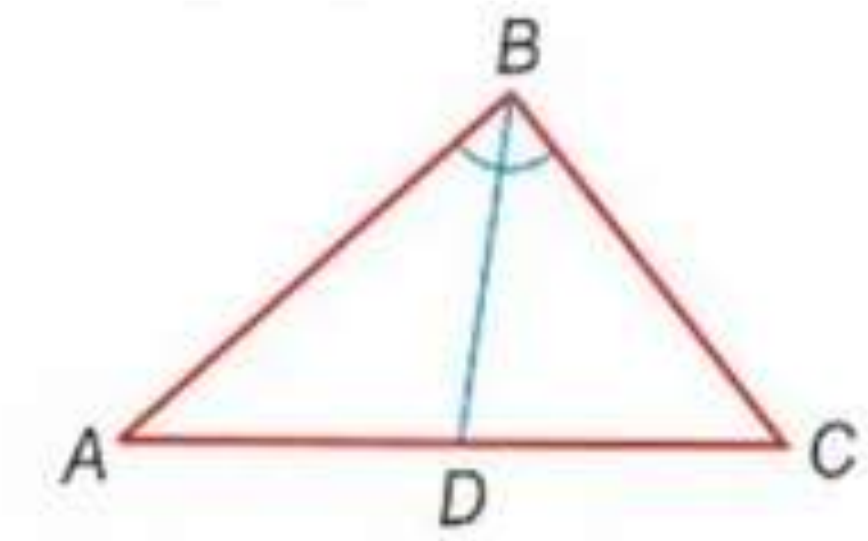
$$= \frac{\kappa \cdot A_1B_1 + \kappa \cdot B_1C_1 + \kappa \cdot A_1C_1}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} =$$

$$= \frac{\kappa \cdot \left(A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1\right)}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} = \kappa$$

$$\frac{P}{P_1} = k$$

Свойство биссектрисы треугольника

Биссектриса треугольника делит противоположную сторону треугольника на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника



$$\frac{BA}{BC} = \frac{AD}{DC}$$

Признаки подобия треугольников:

Т. (по двум углам):

Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Т. (двум пропорциональным сторонам и углу между ними)

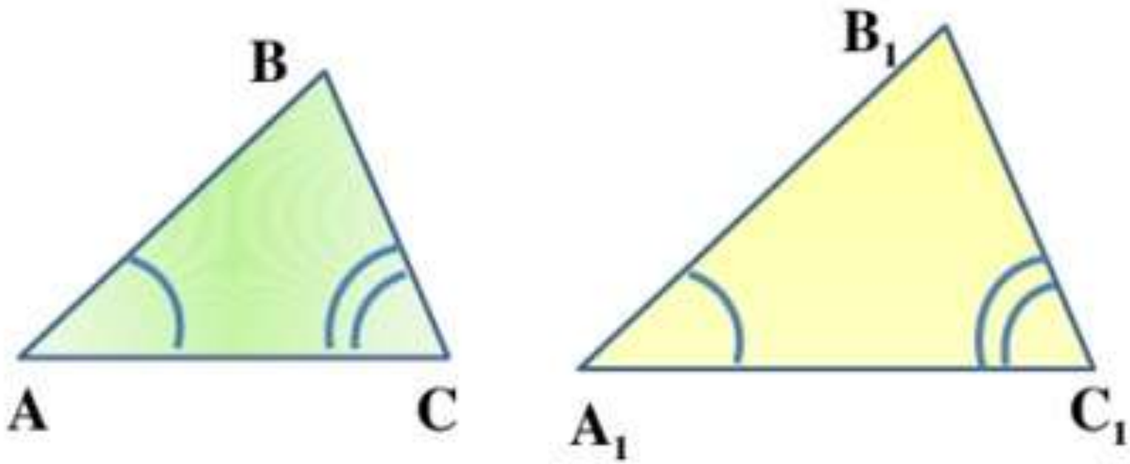
Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы между ними равны, то такие треугольники подобны.

Т. (по трем пропорциональным сторонам)

Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Первый признак подобия треугольников

Теорема. **Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.**



Дано: ΔABC *и* $\Delta A_1B_1C_1$

$\angle A = \angle A_1, \quad \angle C = \angle C_1,$

Доказать:

$\Delta ABC \infty \Delta A_1B_1C_1$

$\angle C = \angle C_1$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{CA \cdot CB}{C_1A_1 \cdot C_1B_1}$$

$\angle A = \angle A_1$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$$

$\angle B = \angle B_1$

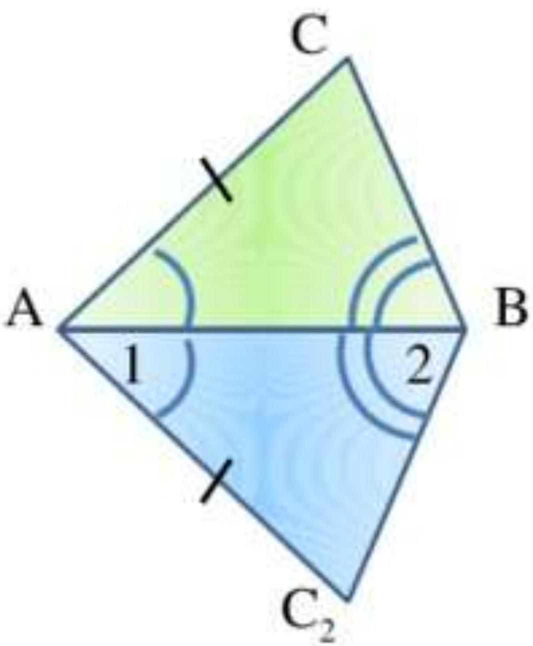
$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{BA \cdot BC}{B_1A_1 \cdot B_1C_1}$$

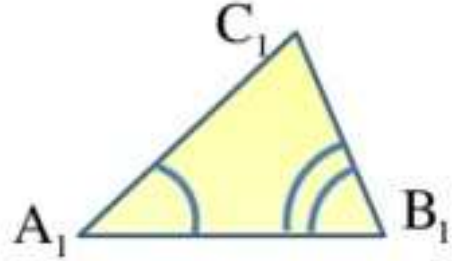
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$$

Треугольники подобны по определению

Второй признак подобия треугольников

Теорема. **Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.**





Дано: ΔABC *и* $\Delta A_1B_1C_1$

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1},\quad \angle A=\angle A_1$$

Доказать:

$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

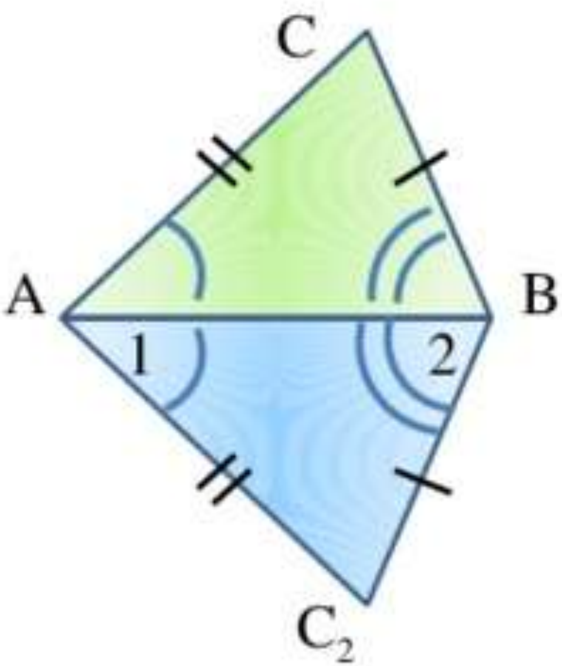
$$\text{Имеем}\ \begin{cases}\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{AC_2}{A_1C_1} & \text{по построению}\\[2ex] \dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{AC}{A_1C_1} & \text{по условию}\end{cases} \Rightarrow AC_2=AC$$

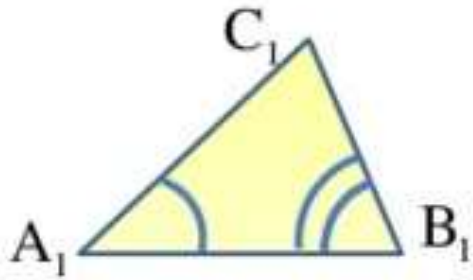
$\Delta ABC_2=\Delta ABC$ (1 *признак*) $\Rightarrow \angle ABC_2=\angle ABC$

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ *по двум углам*

Третий признак подобия треугольников

Теорема. **Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны.**





Дано: ΔABC *и* $\Delta A_1B_1C_1$

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$$

Доказать:

$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

По построению

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC_2}{B_1C_1}=\frac{AC_2}{A_1C_1}$$

По условию

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$$

$$BC_2 = BC \quad AC_2 = AC$$

$$\Delta ABC_2 = \Delta ABC \ \ (3 \text{ признак}) \Rightarrow \angle BAC_2 = \angle BAC,\ \angle ABC_2 = \angle ABC$$

$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1 \text{ по двум углам}$$