

Теория вероятности (ЕГЭ)



Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Два случайных события называются **независимыми**, если наступление одного из них не изменяет вероятность наступления другого.

Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,5. Если А. играет чёрными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,32. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

Решение:

Возможность выиграть первую и вторую партию

$$0,5 \cdot 0,32 = 0,16$$

не зависят друг от друга

Ответ: 0,16

Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в первую мишень и не попадёт в три последние.

Решение :

Вероятность промаха : $1 - 0,8 = 0,2$

$$0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,0064$$

Ответ : 0,0064

Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не собьёт её. Вероятность попадания при каждом отдельном выстреле равна $p = 0,4$. Сколько патронов должен иметь стрелок перед началом стрельбы, чтобы поразить мишень с вероятностью не менее $0,9$?

Решение:

$$1n : 0,4$$

$$2n : 0,6 \cdot 0,4 = 0,24$$

$$3n : 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 0,144$$

$$4n : 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 0,0864$$

$$5n : 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 0,05184$$

$$0,4 + 0,24 + 0,144 + 0,0864 + 0,05184 = 0,92224 > 0,9$$

Ответ : 5 патронов

Помещение освещается тремя лампами. Вероятность перегорания каждой лампы в течение года равна 0,8. Лампы перегорают независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Решение :

A – 1 лампа перегорит в течение года

B – 2 лампы перегорит в течение года

C – 3 лампы перегорит в течение года

$$P(A) = P(B) = P(C) = 0,8$$

Эти события независимые

$0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 0,512$ – перегорели все 3 лампы

Событие, что не перегорит хотя бы

одна лампа противоположное $1 - 0,512 = 0,488$

Ответ : 0,488

Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

События называют **несовместными**, если в одном и том же испытании появление одного из событий исключает появление других событий.

Вероятность того, что на тестировании по математике учащийся А. верно решит больше 9 задач, равна 0,63. Вероятность того, что А. верно решит больше 8 задач, равна 0,75. Найдите вероятность того, что А. верно решит ровно 9 задач.

Решение:

Ответ: 0,12

A – учащийся решит ровно 9 задач

B – учащийся решит больше 9 задач

A + B – учащийся решит больше 8 задач

$$P(A + B) = P(A) + P(B) \quad 0,75 = P(A) + 0,63$$

$$P(A) = 0,75 - 0,63 = 0,12$$

Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей — 1 очко, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,3.

Решение:

A – Вероятность сыграть вничью: $1 - 0,3 - 0,3 = 0,4$

*Фут.ком.может выйти в следующий
круг при следующих несовместных исходах*

*B – выиграла и первую и вторую игру (3 + 3)
 $0,3 \cdot 0,3 = 0,09$*

*C – вничью первую и выиграла вторую (1 + 3)
 $0,4 \cdot 0,3 = 0,12$*

*D – выиграла первую и вничью вторую (3 + 1)
 $0,3 \cdot 0,4 = 0,12$*

Искомая вероятность $0,09 + 0,12 + 0,12 = 0,33$

Ответ: 0,33

Решение задач по формуле полной вероятности

$$**P(C) = P(A) * P\left(\frac{C}{A}\right) + P(B) * P\left(\frac{C}{B}\right)**$$

С – произошло хотя бы одно из событий А
или В

$$**P(A \cup B) = P(A) + P(B)**$$

С – произошли оба события А и В

$$**P(A \cap B) = P(A) * P(B)**$$

Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,01. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,96. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,06. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Решение:

Ситуация когда батарейка забракована:

A – батарейка неисправна и забракована
 $0,01 \cdot 0,96$

B – батарейка исправна, но по ошибке забракована
 $(1 - 0,01) \cdot 0,06 = 0,99 \cdot 0,06$

События быть неисправной батарейкой или быть исправной образуют полную группу. Они несовместны и одно из них непременно происходит.

Применяем формулу полной вероятности:

$$0,01 \cdot 0,96 + 0,99 \cdot 0,06 = 0,069 \quad \text{Ответ: } 0,069$$

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без

вероятности их совместного появления

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в первом автомате закончится кофе равно 0,1. Вероятность того, что кофе закончится во втором автомате такая же. Вероятность того, что кофе закончится в двух автоматах, равна 0,03. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в двух автоматах.

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в первом автомате закончится кофе равно 0,1. Вероятность того, что кофе закончится во втором автомате такая же. Вероятность того, что кофе закончится в двух автоматах, равна 0,03. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в двух автоматах.

Решение :

A – кофе закончится в 1 автомате

B – кофе закончится во 2 автомате

A · B – кофе закончится в обоих автоматах

A + B – кофе закончится хотя бы в одном автомате

$$P(A) = P(B) = 0,1; P(A \cdot B) = 0,03$$

События A и B совместные

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

$$P(A + B) = 0,1 + 0,1 - 0,03 = 0,17$$

Ответ : 0,83

*Кофе останется в обоих автоматах
противоположное событие $1 - 0,17 = 0,83$*

Решение задач

- *Какова вероятность того, что случайно выбранный телефонный номер оканчивается двумя чётными цифрами?*

Решение.

Вероятность того, что на одном из требуемых мест окажется чётное число равна 0,5.

Следовательно, вероятность того, что на двух местах одновременно окажутся два чётных числа равна $0,5 \cdot 0,5 = 0,25$.

Ответ: 0,25.

- **Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,93. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,87. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.**

Решение.

Пусть А - «чайник прослужит больше года, но меньше двух лет»,

В - «чайник прослужит больше двух лет»,

С - «чайник прослужит ровно два года», тогда

А + В + С - «чайник прослужит больше года».

Вероятность события С, состоящего в том, что чайник выйдет из строя ровно через два года — строго в тот же день, час и секунду — равна нулю. Тогда:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) = P(A) + P(B),$$

откуда, используя данные из условия, получаем $0,93 = P(A) + 0,87$.

Тем самым, для искомой вероятности имеем:

$$P(A) = 0,93 - 0,87 = 0,06.$$

Ответ: 0,06.

• *Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая — 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.*

• **Решение.**

Вероятность того, что стекло сделано на первой фабрике и оно бракованное: $0,45 \cdot 0,03 = 0,0135$.

Вероятность того, что стекло сделано на второй фабрике и оно бракованное: $0,55 \cdot 0,01 = 0,0055$.

Поэтому по формуле полной вероятности вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным равна $0,0135 + 0,0055 = 0,019$.

Ответ: 0,019.

Чтобы поступить в институт на специальность «Лингвистика», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Коммерция», нужно набрать не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и обществознание. Вероятность того, что абитуриент З. получит не менее 70 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку — 0,8, по иностранному языку — 0,7 и по обществознанию — 0,5. Найдите вероятность того, что З. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

• Решение.

В силу независимости событий, вероятность успешно сдать экзамены на лингвистику: $0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,7 = 0,336$,

**вероятность успешно сдать экзамены на коммерцию:
 $0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,5 = 0,24$,**

вероятность успешно сдать экзамены и на «Лингвистику», и на «Коммерцию»: $0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,5 = 0,168$.

**Успешная сдача экзаменов на «Лингвистику» и на «Коммерцию» — события совместные, поэтому вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий, уменьшенной на вероятность их произведения. Тем самым, поступить хотя бы на одну из этих специальностей абитуриент может с вероятностью
 $0,336 + 0,24 - 0,168 = 0,408$.**

Ответ: 0,408.